Írásbeli vizsga tudnivalók (Algebra és Számelmélet Intenzív verzió)

A vizsga két részes. Az első rész 45 perces, itt a válaszokat nem kell indokolni. 12 kérdés, mindegyik 1 pontos. Itt a 12 pontból minimum 6-ot kell elérni a 2-eshez. Mintafeladatok ehhez a részhez és további segítség az írásbeli vizsgára való készüléshez Kiss Emil Tanár úr honlapjáról.

A második részben a válaszokat indokolni, a felhasznált állításokat bizonyítani kell. Ez a rész 90 perces, két rövidebb ($6-6$ pontos) és egy hosszabb (12 pontos feladattal). *OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarészből nincs 6 pontja vagy akinek a két rész S összpontszáma kisebb, mint* 10. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$10 \leq S < 15$	2
$15 \leq S < 20$	3
$20 \leq S < 25$	4
$25 \leq S \leq 36$	5

A pirossal jelölt, nehezebb tételek bizonyításából minden vizsgán csak egy (6 pontot érő) feladat fog szerepelni, ráadásul *kettő közül választható formában.* Tehát ha valaki a piros színnel jelölt tételek bizonyítását egyáltalán nem tanulja meg, de minden más kérdésre hibátlanul válaszol, akkor a vizsgán 6 pontot veszít, sőt, egyetlen piros színű tétel kihagyásával még maximális pontszámot is kaphat (a másik bizonyítást választva).

Átfogó (12 pontos) kérdések témakörei

1. A Gauss-elimináció és alkalmazásai (egyenletrendszer, determináns, mátrixok invertálása, rang).

2. Komplex számok definíciója, ábrázolása a síkon, egységgyökök. A komplex számok szükségessége a harmad- és negyedfokú egyenlet megoldásában, a Cardano-képlet levezetése és diszkussziója.

3. A determináns definíciója, kiszámítási módjai (Gauss-elimináció, kifejtési tételek), alkalmazásai az egyenletrendszer megoldhatóságára, a megoldás egyértelműségének kérdésére, a vezéregyesek számának egyértelműségére, az inverz mátrix létezésére és képletére.

4. Polinom deriváltjának definíciója, alaptulajdonságai, alkalmazások: többszörös gyökök, Hensel-lemma.

5. Maradékos osztás, euklideszi algoritmus, kitüntetett közös osztó, prímek, felbonthatatlanok, számelmélet alaptétele $\mathbb{Z}$-ben, $K[x]$-ben és $\mathbb{Z}[x]$-ben.

6. Lineáris diofantikus egyenletek, lineáris kongruenciák, szimultán kongruenciarendszerek, kínai maradéktétel és kapcsolata az interpolációval.

7. Nevezetes számelméleti függvények: Az Euler-féle φ-függvény, osztók száma, osztók összege, kiszámításuk a prímtényezős felbontásból. Multiplikatív és additív számelméleti függvények, Möbius megfordítási formula.

8. A körosztási polinom egész együtthatós, irreducibilis, alkalmazások: Dirichlet tételének $nk+1$ esete, modulo p gyök rendje, primitív gyök létezése.

9. Gyökök és együtthatók közötti összefüggések, szimmetrikus polinomok, lexikografikus rendezés, a szimmetrikus polinomok alaptételének bizonyítása.

Rövidebb (6 pontos) bizonyítandó állítások

10. A Horner-elrendezés, a gyöktényező kiemelhetősége.

11. Egy test fölötti polinomnak legfeljebb annyi gyöke van, mint a foka.

12. A hatvány rendjének képlete.

13. Végtelen sok prím van. Végtelen sok $4k-1$ alakú prím van.

14. Legendre formula a faktoriális prímfelbontására.

15. Az Euler–Fermat tétel.

16. A Wilson-tétel.

17. A mátrixszorzás asszociativitása.

18. A permutációk előjelének szorzástétele.

19. A transzponált mátrix determinánsa.

20. A determinánsok szorzástételének bizonyítása.

21. Pitagoraszi számhármasok paraméterezése.

22. Möbius megfordítási formula.

23. A páros tökéletes számok jellemzése.

24. A Newton–Girard-formulák bizonyítása.

25. Racionális gyökteszt. Pluszpontért: erősebb állítás Newton-poligonnal.

26. A Schönemann–Eisenstein irreducibilitási kritérium. A két polinom szorzatának Newton-poligonjáról szóló állítást fel szabad használni bizonyítás nélkül.

27. Racionális együtthatós polinomok szorzatának Newton-poligonja.

28. Ha g primitív gyök modulo p (prím), akkor g vagy $g+p$ primitív gyök modulo p^2.

29. Ha g primitív gyök modulo p^2 (p páratlan prím), akkor primitív gyök modulo p^n is minden $n \geq 1$-re.

30. Kvadratikus maradékok, Legendre-szimbólum, alaptulajdonságaik, Euler-lemma, Kvadratikus reciprocitás (NB).

31. Két normált polinom rezultánsa pontosan akkor 0, ha a két polinomnak van közös gyöke.

32. $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

33. Az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható legnagyobb prímhatvány osztója $\leq n$.

34. A $\pi(n)$ alsó becslése. A binomiális együtthatók prímhatvány osztóinak becslését fel szabad használni bizonyítás nélkül.

35. $\prod_{p \leq n} p < 4^n$.

36. A $\pi(n)$ felső becslése. Fel szabad használni bizonyítás nélkül, hogy $\prod_{p \leq n} p < 4^n$.

37. Csebisev tétele n és $2n$ közötti prímekről. Fel szabad használni bizonyítás nélkül a binomiális együtthatók prímhatvány osztóinak becslését és azt is, hogy $\prod_{p \leq n} p < 4^n$.