Bsc algebra1 gyakorlat

Első zárthelyi dolgozat (2023. október 20.) – eredmények, megoldások, pontozás

1. **a)** $AB + A$ nem értelmes, mert már AB sem az (1 pont). $BA + A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 22 \\ -2 & -4 & 20 \end{pmatrix}$ (1 pont).

b) A megoldóképlet alapján $z_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{-3-4i}}{2}$ (1 pont). A négyzetgyökvonáshoz: $a^2 - b^2 + 2abi = (a+bi)^2 = -3 - 4i$ egyenletet kapjuk, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ (1 pont). A valós és képzetes részeket összehasonlítva ez azzal ekvivalens, hogy $a^2 - b^2 = -3$, $2ab = -4$. A másodikból b-t kifejezve és beírva az elsőbe (a és b nem lehet 0), beszorozva a^2-tel $a^4 + 3a^2 - 4 = 0$ adódik, ahonnan $a^2 = 1$ vagy -4, de utóbbi nem lehet, hiszen $a^2 \geq 0$ (1 pont). Innen a két megoldás $a = \pm 1$, $b = \mp 2$, azaz $z_1 = 3 - i$, $z_2 = 2 + i$ (1 pont).

c) A hatszög középpontja $\frac{z+w}{2}$, az innen z-be mutató vektor a $z - \frac{z+w}{2} = \frac{z-w}{2}$ komplex számnak felel meg (1 pont). A középpontból a másik 4 csúcsba vezető vektor ezért $\frac{(z-w)\varepsilon}{2}$, $\frac{(z-w)\varepsilon^2}{2}$, $\frac{(z-w)\varepsilon^4}{2}$ és $\frac{(z-w)\varepsilon^5}{2}$, hiszen a $\frac{z-w}{2}$ vektort kell $60, 120, 240$, illetve 300 fokkal forgatni (2 pont). Tehát a négy keresett komplex szám $\frac{z+w+(z-w)\varepsilon}{2} = \frac{z(1+\varepsilon)+w(1-\varepsilon)}{2}$, $\frac{z+w+(z-w)\varepsilon^2}{2} = \frac{z\varepsilon+w(2-\varepsilon)}{2}$, $\frac{z+w+(z-w)\varepsilon^4}{2} = \frac{z(1-\varepsilon)+w(1+\varepsilon)}{2}$ és $\frac{z+w+(z-w)\varepsilon^5}{2} = \frac{z(2-\varepsilon)+w\varepsilon}{2}$ azt is felhasználva, hogy $\varepsilon^2 = \varepsilon - 1$ (1 pont). Ha a megoldás helyes, az is maximális pontszámot kap, aki nem hozza egyszerűbb alakra ε hatványait.

2. **a)** Trigonometrikus alakban $\sqrt{7} - \sqrt{7}i = \sqrt{14}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4))$ (1 pont). A negyedik gyökök: $\sqrt[8]{14}(\cos(-\pi/16) + i\sin(-\pi/16))$, $\sqrt[8]{14}(\cos(7\pi/16) + i\sin(7\pi/16))$, $\sqrt[8]{14}(\cos(15\pi/16) + i\sin(15\pi/16))$ és $\sqrt[8]{14}(\cos(-9\pi/16) + i\sin(-9\pi/16))$ (1 pont). Az ábrázolásért is jár 1 pont (mind a 4 síknegyedbe esik egy).

b) A rend $\frac{254}{360}$ egyszerűsített alakjában a nevező (1 pont), azaz 180, hiszen $\frac{254}{360} = \frac{127}{180}$, ahol $(127, 180) = 1$, mert $2, 3, 5 \nmid 127$, holott 180-nak csak ezek a prímosztói (1 pont).

c) Gauss-eliminációs lépéseket végzünk, melyek ekvivalens átalakítások. (1 pont) A középső egyenletet hozzáadva a harmadikhoz, illetve háromszorosát levonva az első egyenletből a

$$\begin{aligned} -5y - 10z &= -5 \\ x + y + 4z &= 2 \\ 5y + 10z &= 5 \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik. (2 pont) A harmadik sort az elsőhöz adva csupa 0 egyenletet kapunk, amit el is hagyhatunk. A harmadik sort megszorozzuk 1/5-del és levonjuk a második sorból, a kapott egyenletrendszer

$$\begin{aligned} x \quad + 2z &= 1 \\ y + 2z &= 1 \end{aligned}$$

(1 pont). Így z szabad változó, x és y pedig kötött: $x = 1 - 2z$, $y = 1 - 2z$. (1 pont).

3. **a)** Euklideszi algoritmust végzünk (1 pont). $x^3 + 8 = (x^2 + 3x + 2)(x - 3) + 7x + 14$ (1 pont); $x^2 + 3x + 2 = (7x + 14)(\frac{1}{7}x + \frac{1}{7})$ (1 pont), tehát a kitüntetett közös osztó $7x + 14 = 7(x + 2) = 1 \cdot (x^3 + 8) - (x - 3)(x^2 + 3x + 2)$, azaz $f(x) = 1$, $g(x) = -x + 3$ (1 pont).

b) A $7x + 9y = 86$ egyenletet kell megoldanunk a nemnegatív egész számok körében (1 pont). Az órán tanult módszert használva: $x = \frac{86-9y}{7} = 12 - y + z$, ahol $z := \frac{2-2y}{7}$ (1 pont). $7z + 2y = 2$, azaz $y = \frac{2-7z}{2} = 1 - 4z + w$, ahol $w = \frac{z}{2}$ (1 pont). Tehát $z = 2w$, $y = 1 - 7w$, $x = 11 + 9w$ (1 pont). Mivel $x, y \geq 0$ és w egész, ezért $w = -1$ vagy $w = 0$, azaz vagy 2 hétfejű és 8 kilencfejű, vagy 11 hétfejű és 1 kilencfejű sárkány van, azaz összesen 10 vagy 12 sárkány (2 pont).

4. Mivel ε rendje 15, ezért $\varepsilon = \cos\frac{2k\pi}{15} + i\sin\frac{2k\pi}{15}$ alakú, ahol $(k, 15) = 1$ (1 pont). Hasonlóan $\eta = \cos\frac{2l\pi}{5} + i\sin\frac{2l\pi}{5}$, ahol $(l, 5) = 1$ (1 pont). Így $\varepsilon\eta = \cos\frac{2\pi(k+3l)}{15} + i\sin\frac{2\pi(k+3l)}{15}$ (1 pont) rendje a $\frac{k+3l}{15}$ egyszerűsített alakjában a nevező, azaz a rend $\frac{15}{(k+3l,15)}$ (1 pont). Viszont $3 \nmid k + 3l$, hiszen $(k, 15) = 1$, így $(k + 3l, 15)$ csak 1 vagy 5 lehet (1 pont). Mindkettő elő is fordul, pl. $k = l = 1$ esetén $(k + 3l, 15) = 1$,

$k = 2, l = 1$ esetén $(k + 3l, 15) = 5$, azaz $\varepsilon\eta$ rendje 3 vagy 15 lehet (2 pont). Végül az olyan $\varepsilon\eta$ rendje pontosan akkor 3, ha $k + 3l \equiv 0 \pmod 5$ (1 pont). Mivel k rögzített és $(3, 5) = 1$, ezért ennek a kongruenciának pontosan egy megoldása van modulo 5, azaz egyetlen ilyen η ötödik egységgyök van (1 pont), ráadásul az így adódó η primitív ötödik egységgyök lesz egyben, hiszen $5 \nmid l$ (ugyanis $5 \nmid k$) (1 pont).

5. Mivel $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$ (1 pont), az Euler-Fermat tétel szerint $a^{2^{n-1}} \equiv 1 \equiv b^{2^{n-1}} \pmod{2^n}$ (2 pont). Másrészt $(2^{n-1}, 2k + 1) = 1$ felírható $1 = 2^{n-1}u + (2k + 1)v$ alakban, ahol $u, v \in \mathbb{Z}$ (2 pont). Tehát

$$a = a^{2^{n-1}u+(2k+1)v} = (a^{2^{n-1}})^u \cdot (a^{2k+1})^v \equiv (b^{2^{n-1}})^u \cdot (b^{2k+1})^v = b^{2^{n-1}u+(2k+1)v} = b \pmod{2^n}$$

(5 pont). Ugyan itt u és v közül az egyik negatív, de valójában ez sem jelent problémát, mert páratlan számoknak egyértelmű reciproka van modulo 2^n. Pl. ha $v < 0 < u$, akkor a fenti kongruenciát úgy is érthetjük, hogy a az egyértelmű megoldása az $a^{-(2k+1)v}x \equiv a^{2^{n-1}u} \pmod{2^n}$ kongruenciának.

2. megoldás: A feltétel szerint $2^n \mid a^{2k+1} - b^{2k+1} = (a - b)(a^{2k} + a^{2k-1}b + \cdots + ab^{2k-1} + b^{2k})$ (3 pont). Itt $a^{2k} + a^{2k-1}b + \cdots + ab^{2k-1} + b^{2k}$ páratlan, hiszen $2k + 1$ darab páratlan szám összege (5 pont), így relatív prím 2^n-hez. Tehát $2^n \mid a - b$, azaz $a \equiv b \pmod{2^n}$ (2 pont).

6. A $\mathbb{C}$ feletti állítást f foka szerinti indukcióval bizonyítjuk (1 pont). Ha f foka 1, akkor kell lennie két nem 0 tagjának ahhoz, hogy az $x = 1$ gyöke lehessen, tehát az állítás igaz. Tehát tegyük fel, hogy az állítás igaz minden legfeljebb k-adfokú polinomra (és minden n-re), f pedig legyen egy $(k + 1)$-edfokú polinom, aminek az $x = 1$ n-szeres gyöke. Ha f-ben a konstans tag 0, akkor leoszthatjuk x-szel, így kapunk egy k-adfokú polinomot, aminek szintén n-szeres gyöke az $x = 1$, és ugyanannyi nem-0 tagja van, tehát az indukciós feltétel miatt készen vagyunk (3 pont). Ha pedig a konstans tag nem 0, akkor az f' deriváltban pontosan eggyel kevesebb nemnulla tag van, és az $x = 1$ is $n - 1$-szeres gyöke f'-nek. Sőt, f' foka k, ezért alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, és ugyancsak készen vagyunk (4 pont).

Az állítás $\mathbb{F}_p$ feletti polinomokra nem igaz, hiszen $x^p - 1 = (x - 1)^p$-nek az $x = 1$ p-szeres gyöke, de ennek csak két nem 0 együtthatója van (2 pont).

7. Legyen $g(x) = f(x + 1)$. Ekkor g-nek gyöke a $p/q - 1 = (p - q)/q$ racionális szám, ezért a racionális gyökteszt szerint $p - q$ osztója g konstans tagjának, ami $g(0) = f(1)$. (Használhatjuk a racionális gyöktesztet, hiszen $(p, q) = 1$ miatt $(p - q, q) = 1$ is teljesül.) A másik állítást a racionális gyökteszt $h(x) = f(x - 1)$ polinomra való alkalmazásával kapjuk. (10 pont)