Mat. I. (BSc.) **Algebra és számelmélet: 4. vizsga (intenzív), I. rész** *2024. feb. 1.*

NÉV: ____________________ ELTE AZONOSÍTÓ: __________

I. rész (45 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0. *Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 6 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.*

1. Legyen $n > 0$ egész kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ (azaz a $p_1, \dots, p_r$ prímek páronként különbözőek és $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$). Írjuk fel $\mu(n)$ és $\sigma(n)$ képletét.

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{ha } \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1 \\ 0 & \text{ha van olyan } 1 \le i \le r \text{, amire } \alpha_i > 1 \end{cases} \qquad \text{és} \qquad \sigma(n) = \prod_{j=1}^{r} \frac{p_j^{\alpha_j+1} - 1}{p_j - 1}.$$

2. Legyenek $x \neq y$ komplex számok, melyekre $|x| = |y|$. Mennyi lehet $\frac{x+y}{x-y}$ szöge?

$\pm 90°$.

3. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Mely a egész számokra van megoldása a $30x \equiv a \pmod{24}$ kongruenciának?

Ha $(30, 24) \mid a$, azaz ha $6 \mid a$.

5. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy $\mathbb{R}$ fölötti lineáris egyenletrendszerben kevesebb ismeretlen van, mint egyenlet, akkor nem lehet végtelen sok megoldás.”

Pl. $x + y = 1$, $2x + 2y = 2$, $3x + 3y = 3$.

6. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ permutációt diszjunkt ciklusok szorzataként.

$(12)(36)(45)$.

7. Legyen $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ olyan, hogy $\det A = 2$. Mennyi $\det(5AA^T)$?

100.

8. Bontsuk $\mathbb{F}_2$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^5 + x^4 + 1$ polinomot.

$(x^2 + x + 1)(x^3 + x + 1)$.

9. A racionális gyökteszt alkalmazásakor mely racionális számok jöhetnek szóba a $3x^6 - 5x^5 + 7x^4 - 9x^2 + x - 2$ polinom gyökeként? (Azt nem kell ellenőrizni, hogy ezek valóban gyökök-e.)

$\pm 1, \pm 2, \pm 1/3, \pm 2/3$.

10. Mi a lexikografikus legnagyobb tagja a $(x_1 + x_2^7 + x_3^9)^5(x_2 + x_3x_4)^2$ polinomnak?

$x_1^5 x_2^2$.

11. Mely p prímekre irreducibilis az $x^2 + x + 1$ polinom modulo p?

Ha $p \equiv 2 \pmod 3$.

12. Írjuk fel növekvő sorrendben és multiplicitással a $9x^4 - x^3 + 3x^2 + 12x + 9$ polinom $p = 3$-ra vonatkozó Newton-poligonjának meredekségeit.

$-2, 1/2, 1/2, 1$.