Mat. I. (BSc.) **Algebra és számelmélet: 3. vizsga (intenzív), I. rész** *2024. jan. 24.*

NÉV: ______________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

I. rész (45 perc). *Minden teljesen precíz és korrekt válaszért 1 pont jár, a többiért* 0*. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább* 6 *pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.*

1. Legyen $n > 0$ egész kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ (azaz a $p_1, \dots, p_r$ prímek páronként különbözőek és $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$). Írjuk fel $\varphi(n)$ és $d(n)$ képletét.

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^{r} (p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j - 1}) = n \prod_{j=1}^{r} (1 - \tfrac{1}{p_j}) \qquad \text{és} \qquad d(n) = \prod_{j=1}^{r} (\alpha_j + 1)\ .$$

2. Mennyi $(1+i)^{2024}$ értéke? (Algebrai alakban, a valós és képzetes rész is konkrét szám legyen, ne binomiális összeg.)

2^{1012}.

3. Soroljuk föl $2 - 2i$ felső félsíkba eső köbgyökeit.

$\sqrt{2}(\cos 105° + i \sin 105°) = \sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$.

4. Mely a egész számokra van megoldása az $\begin{cases} x \equiv a \pmod{6} \\ 2x \equiv a \pmod{20} \end{cases}$ szimultán kongruenciarendszernek?

Ha $4 \mid a$.

5. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy $\mathbb{R}$ fölötti lineáris egyenletrendszerben több ismeretlen van, mint egyenlet, akkor végtelen sok megoldása van.”

Pl. $x + y + z = 0$, $2x + 2y + 2z = 2$.

6. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ permutációt diszjunkt ciklusok szorzataként.

(15)(346).

7. Adjunk meg olyan $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixokat, melyekre $AB = 0$, de $BA \neq 0$.

Pl. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

8. Bontsuk $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilisek szorzatára az $x^5 + 3x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 2$ polinomot.

$(x+1)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$.

9. Egy 20-adfokú valós együtthatós polinomnak háromszoros gyöke a $2+i$. Legfeljebb hányszoros gyöke a 13? Adjunk is példát a maximumra.

Legfeljebb 14-szeres gyöke, példa: $(x-13)^{14}(x^2 - 4x + 5)^3$.

10. Mely k_1, k_2, k_3, k_4 egész számokra lesz a $\sigma_1^{k_1}\sigma_2^{k_2}\sigma_3^{k_3}\sigma_4^{k_4}$ polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^7 x_2^7 x_3^4 x_4^3$?

$k_1 = 0, k_2 = 3, k_3 = 1, k_4 = 3$.

11. Mely p prímekre irreducibilis az $x^2 - x + 1$ polinom modulo p?

Ha $p \equiv 2 \pmod 3$.

12. Hány primitív gyök van modulo 13 (egy mod 13 redukált maradékrendszerben)?

$\varphi(12) = 4$.