

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**I. rész (45 perc).** Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 6 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.

1. Legyen  $n > 0$  egész kanonikus alakja  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$  (azaz a  $p_1, \dots, p_r$  prímelek páronként különbözőek és  $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$ ). Írjuk fel  $\mu(n)$  és  $d(n)$  képletét.

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^r & \text{ha } \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 1 \\ 0 & \text{ha van olyan } 1 \leq i \leq r, \text{ amire } \alpha_i > 1 \end{cases} \quad \text{és} \quad d(n) = \prod_{j=1}^r (\alpha_j + 1).$$

2. Legyenek  $x, y$  nullától különböző komplex számok, melyekre  $|x + y| = |x - y|$ . Mennyi lehet  $\frac{x}{y}$  szöge?

$$\pm 90^\circ \text{ (azaz } \pm \pi/2 \text{)}.$$

3. Legyen  $z$  primitív 24-edik egységgyök. Melyik komplex szám lehet  $z^{-42}$ ?

$$\pm i.$$

4. Mely  $a$  egész számokra van megoldása az  $x^3 \equiv 2^a \pmod{7}$  kongruenciának?

$$\text{Ha } 3 \mid a.$$

5. Írjunk föl egy olyan lineáris egyenletrendszer az  $x, y, z$  ismeretlenekkel, amelyben bárhogy is végezzük az eliminációt, keletkezik szabad változó, de az soha nem az  $x$ .

$$\text{Pl. } y + z = 0, x = 0.$$

6. A  $4 \times 4$ -es  $((a_{ij}))$  determináns második és harmadik oszlopa egyenlő. Az  $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$  tagot melyik tag ejti ki biztosan?

$$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}.$$

7. Adjunk meg olyan  $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ -beli mátrixot, aminek a négyzete nem 0, de a köbe igen.

$$\text{Pl. } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

8. A racionális gyökteszt alkalmazásakor mely racionális számok jöhetnek szóba a  $2x^5 - 7x^4 + 8x^3 - 9x^2 + x - 3$  polinom gyökeként? (Azt nem kell ellenőrizni, hogy ezek valóban gyökök-e.)

$$\pm 1, \pm 3, \pm 1/2, \pm 3/2.$$

9. Írjuk fel növekvő sorrendben és multiplicitással a  $24x^5 + x^3 - 48x^2 + 8x - 6$  polinom  $p = 2$ -re vonatkozó Newton-poligonjának meredekségeit.

$$-3/2, -3/2, 1/3, 1/3, 1/3.$$

10. Mi a  $(x_1^5 + x_2 + x_1x_3^2 - x_1^2x_4 + x_3)^6(x_1^2 + x_2^4 + x_3 + x_4)$  polinom **hetedfokú homogén komposziciójában** a lexikografikusan legnagyobb tag?

$$x_2^6x_3.$$

11. Adjunk meg olyan  $\mathbb{F}_2$  fölötti polinomot, melynek pontosan kétszeres gyöke a 0, deriváltjának pedig pontosan négyszeres gyöke a 0.

$$\text{Pl. } x^5 + x^2.$$

12. Mely  $2 < p < q$  prímekre **hamis** a Legendre-szimbólumok közötti  $\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)$  egyenlőség?

$$\text{Ha } p \equiv q \equiv -1 \pmod{4}.$$