NÉV: ______________________________ ELTE AZONOSÍTÓ: ____________

II. rész (90 perc). *Ebben a részben a válaszokat indokolni kell. Összesen* $12 + 6 + 6 = 24$ *pontot lehet szerezni.*

13. Deriválás és alkalmazásai ($6 + 6$ pont).

    (a) Definiáljuk a polinom deriváltját és mutassuk meg, hogy egy K test fölötti egyváltozós f polinomnak egy $a \in K$ elem pontosan akkor legalább kétszeres gyöke, ha $f(a) = f'(a) = 0$.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarészből nincs 6 pontja vagy akinek a két rész S összpontszáma kisebb, mint 10. *A többiek osztályzata:*

	Osztályzat
$10 \leq S < 15$	2
$15 \leq S < 20$	3
$20 \leq S < 25$	4
$25 \leq S \leq 36$	5

(b) Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, p prím és $a \in \mathbb{Z}$ olyan, hogy $p \mid f(a)$, de $p \nmid f'(a)$. Mutassuk meg, hogy pontosan egy olyan $b \in \{0, 1, \ldots, p^2 - 1\}$ van, melyre $a \equiv b \pmod{p}$ és $p^2 \mid f(b)$. **Bónusz kérdés további** 3 **pontért:** Igazoljuk ennek segítségével, hogy van olyan $a \in \mathbb{Z}$ egész, melyre $p \mid \Phi_{p-1}(a)$, de $p^2 \nmid \Phi_{p-1}(a)$ és minden ilyen a primitív gyök modulo p^2.

14. Mondjuk ki és bizonyítsuk be a transzponált mátrix determinánsára vonatkozó tételt. (A permutációk előjelének szorzástételét fel szabad használni bizonyítás nélkül.) (6 pont)

15. Igazoljuk, hogy az $\binom{n}{k}$ binomiális együttható legnagyobb prímhatvány osztója $\leq n$. **VAGY** hogy $\prod_{p\leq n} p < 4^n$. (6 pont)