

NÉV: _____ ELTE AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (45 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 6 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.

1. Legyen $n > 0$ egész kanonikus alakja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ (azaz a p_1, \dots, p_r prímelek páronként különbözőek és $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$). Írjuk fel $\varphi(n)$ és $\sigma(n)$ képletét.

$$\varphi(n) = \prod_{j=1}^r (p_j^{\alpha_j} - p_j^{\alpha_j-1}) = n \prod_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) \quad \text{és} \quad \sigma(n) = \prod_{j=1}^r \frac{p_j^{\alpha_j+1} - 1}{p_j - 1}.$$

2. Milyen további feltétellel tehetnénk igazgá az alábbi hamis állítást? „Egy racionális együtthatós legfeljebb harmadfokú polinom pontosan akkor irreducibilis, ha nincs racionális gyöke.”

Egy racionális együtthatós legfeljebb harmadfokú, **de legalább másodfokú** polinom pontosan akkor irreducibilis, ha nincs racionális gyöke.

3. Mennyi $(\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))^{10}$ rendje?

$$\frac{100}{360} = \frac{5}{18} \text{ egyszerűsített alakban a nevező, ami 18.}$$

4. Mely a egész számokra van megoldása az $ax \equiv 10 \pmod{12}$ kongruenciának?

Ha $(a, 12) \mid 10$, azaz ha $4 \nmid a$ és $3 \nmid a$.

5. Írjuk fel a $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ permutációt diszjunkt ciklusok szorzataként.

$(136)(25)$

6. Ha az $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$ mátrix determinánsa 3, mennyi $\det(M^T + M^T)$?

$$2^5 \cdot 3 = 96.$$

7. Számítsuk ki $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ inverzét.

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

8. Hány (modulo 625 maradékosztály) megoldása van az $x^3 - x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{625}$ kongruenciának?

1.

9. Mi a maradék, ha a $2023x^{2024} - 2024x^{2023}$ polinomot elosztjuk maradékosan az $x^2 + x + 1$ polinommal $\mathbb{Q}[x]$ -ben?

$$-4047x - 2023.$$

10. Mi a lexikografikusan legnagyobb tagja az $(x_1^2 + x_2^5 + x_1x_3^2 - x_1^2x_4)^7(x_1^3 - x_2^4)^5$ polinomnak?

$$-x_1^{29}x_4^7.$$

11. Bontsuk irreducibilisek szorzatára \mathbb{F}_3 fölött az $x^3 - x^2 - 1$ polinomot.

$$(x + 1)(x^2 + x - 1).$$

12. Mely p prímekre van gyöke a $\Phi_{12}(x)$ polinomnak \mathbb{F}_p -ben?

$$\text{Ha } p \equiv 1 \pmod{12}.$$