

NÉV: \_\_\_\_\_

ELTE AZONOSÍTÓ: \_\_\_\_\_

**I. rész (45 perc).** Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 6 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második részt ki sem javítjuk.

1. Legyen  $n > 0$  egész kanonikus alakja  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$  (azaz a  $p_1, \dots, p_r$  prímelek páronként különbözőek és  $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$ ). Írjuk fel  $\varphi(n)$  és  $\sigma(n)$  képletét.

2. Milyen további feltétellel tehetnénk igazgá az alábbi hamis állítást? „Egy racionális együtthatós legfeljebb harmadfokú polinom pontosan akkor irreducibilis, ha nincs racionális gyöke.”

3. Mennyi  $(\cos(10^\circ) + i \sin(10^\circ))^{10}$  rendje?

4. Mely  $a$  egész számokra van megoldása az  $ax \equiv 10 \pmod{12}$  kongruenciának?

5. Írjuk fel a  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$  permutációt diszjunkt ciklusok szorzataként.

6. Ha az  $M \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  mátrix determinánusa 3, mennyi  $\det(M^T + M^T)$ ?

7. Számítsuk ki  $\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$  inverzét.

8. Hány (modulo 625 maradékosztály) megoldása van az  $x^3 - x^2 + 4x + 1 \equiv 0 \pmod{625}$  kongruenciának?

9. Mi a maradék, ha a  $2023x^{2024} - 2024x^{2023}$  polinomot elosztjuk maradékosan az  $x^2 + x + 1$  polinommal  $\mathbb{Q}[x]$ -ben?

10. Mi a lexikografikusan legnagyobb tagja az  $(x_1^2 + x_2^5 + x_1x_3^2 - x_1^2x_4)^7(x_1^3 - x_2^4)^5$  polinomnak?

11. Bontsuk irreducibilisek szorzatára  $\mathbb{F}_3$  fölött az  $x^3 - x^2 - 1$  polinomot.

12. Mely  $p$  prímeke van gyöke a  $\Phi_{12}(x)$  polinomnak  $\mathbb{F}_p$ -ben?