

Bsc algebra1 gyakorlat

Második zárthelyi dolgozat (2023. december 15.)

Mindegyik feladat 10 pontot ér. Az elégségeshez legalább 20 pontot kell szerezni. Egy darab, kézzel írott A4-es lapot szabad használni, más segédeszközt (pl. kalkulátort, mobiltelefont) nem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Kérjük, hogy a **szerző nevét és NEPTUN-kódját, valamint a gyakorlatvezető nevét minden lapra OLVASHATÓ** nyomtatott betűkkel írják fel.

1. (3 + 2 + 5 pont)

a) Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix inverzében a harmadik sor második elemét.

b) Számítsuk ki az $(124)(12)(132)$ szorzatot és adjuk meg a paritását.

c) Legyenek az $x^3 + px + q$ polinom gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Számítsuk ki az $\alpha_1^2\alpha_2^2 + \alpha_2^2\alpha_3^2 + \alpha_3^2\alpha_1^2$ összeget.

2. (5 + 5 pont)

a) Hány megoldása van az $x^6 + 4x \equiv d \pmod{7^3}$ kongruenciának $d = 3$, illetve $d = 2$ esetén?

b) Készítsünk modulo 13 indextáblázatot a $g = 2$ primitív gyök segítségével és oldjuk meg a $11x^3 \equiv 3 \pmod{13}$ kongruenciát.

3. (3 + 4 + 3 pont)

a) Számítsuk ki a $\Phi_{24}(x)$ körosztási polinomot.

b) Határozzuk meg az összes \mathbb{F}_3 fölött irreducibilis, harmadfokú, 1 főegyütthatós polinomot.

c) Egy százlábú meg szeretné számolni a lábait. Tudja, hogy legfeljebb 180 lába van. Ha 9-esével számolja, akkor 4 marad ki, ha pedig 11-esével számolja, 6 marad ki. Hány lába van a százlábúnak?

4. Legyenek n és k egymáshoz relatív prím pozitív egészek. Igazoljuk a $\Phi_n(x) \mid \Phi_n(x^k)$ oszthatóságot $\mathbb{Z}[x]$ -ben.

5. Írjuk fel irreducibilisek szorzataként \mathbb{Q} fölött a $9x^5 + 18x^4 + 9x^3 + x^2 + 4x + 3$ polinomot.

6. Igazoljuk, hogy tetszőleges p prímszám esetén van olyan b egész, hogy $p \mid (b^2 + 1)(b^2 - 2)(b^2 + 2)$.

7. Adjunk meg olyan 37×2023 -as mátrixot, melynek egyik 37×37 -es aldeterminánusa sem 0.