Bsc algebra1 gyakorlat

Első zárthelyi dolgozat (2023. október 20.)

Mindegyik feladat 10 pontot ér. Az elégségeshez legalább 20 pontot kell szerezni. Egy darab, kézzel írott A4-es lapot szabad használni, más segédeszközt (pl. kalkulátort, mobiltelefont) nem. Minden feladat **új oldalon** kezdődjön. Kérjük, hogy a **szerző nevét és NEPTUN-kódját, valamint a gyakorlatvezető nevét minden lapra** OLVASHATÓ nyomtatott betűkkel írják fel.

1. $(2+4+4$ pont$)$

a) Legyen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Az $AB + A$ és a $BA + A$ mátrixműveletek közül melyik értelmes? Végezzük is el, amelyik értelmes.

b) Oldjuk meg a $z^2 - 5z + 7 + i = 0$ egyenletet $\mathbb{C}$-ben. (A komplex négyzetgyökvonást is el kell végezni.)

c) Legyen $\varepsilon = \cos 60° + i \sin 60°$. Fejezzük ki ε, z, w segítségével annak a szabályos hatszögnek a másik négy csúcsát, melynek két szemközti csúcsát a z és w komplex számok alkotják.

2. $(3+2+5$ pont$)$

a) Egyenként soroljuk föl (trigonometrikus alakban) és **ábrázoljuk a síkon** a $\sqrt{7} - \sqrt{7}i$ szám negyedik gyökeit.

b) Mennyi $\cos(254°) + i \sin(254°)$ rendje?

c) Adjuk meg a

$$\begin{aligned} 3\,x - 2\,y + 2\,z &= 1 \\ x + y + 4\,z &= 2 \\ -\,x + 4\,y + 6\,z &= 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszer általános megoldását.

3. $(4+6$ pont$)$

a) Határozzuk meg az $x^3 + 8$ és az $x^2 + 3x + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját és írjuk fel $f(x)(x^3+8) + g(x)(x^2+3x+2)$ alakban.

b) Egy szigeten 7- és 9-fejű sárkányok élnek. Összesen 86 fejük van. Hány sárkány él a szigeten? Minden lehetséges értéket adjunk meg.

4. Tegyük fel, hogy ε rendje 15. Mennyi lehet $\varepsilon\eta$ rendje, ha η egy primitív ötödik egységgyök? Hány olyan η primitív ötödik egységgyök van, melyre $o(\varepsilon\eta) = 3$?

5. Legyenek a és b páratlan számok, k és n természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy ha

$$a^{2k+1} \equiv b^{2k+1} \pmod{2^n},$$

akkor

$$a \equiv b \pmod{2^n}.$$

6. $(8+2$ pont$)$ Legyen n egy pozitív egész szám. Igazoljuk, hogy ha egy $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ polinomnak az $x = 1$ pontosan n-szeres gyöke, akkor az f-ben legalább $n+1$ darab 0-tól különböző együttható van. Igaz-e az analóg állítás $\mathbb{F}_p[x]$-beli polinomokra?

7. Legyen f egy egész együtthatós polinom és tegyük fel, hogy $f(p/q) = 0$ valamely p/q racionális számra $(p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0,\ (p,q) = 1)$. Igazoljuk, hogy $p - q \mid f(1)$ és $p + q \mid f(-1)$.