Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat
Kilencedik feladatsor

1. ***(2.6.8, 2.7.13)*** Az alábbi $p(x_1, x_2, x_3, x_4)$ polinomot bontsuk föl homogén polinomok összegére, ezeket rendezzük lexikografikusan, és állapítsuk meg a p^7 polinomban egyrészt a lexikografikusan legnagyobb tagot, másrészt a legnagyobb fokú tagok közül a lexikografikusan legnagyobb tagot.

$$ix_1x_2x_3x_4^2 - x_1^2x_3^3 + 3x_1^3x_2 + \pi x_1^2x_2^3 + x_4 - x_1^2x_2^2x_3 + 2x_1^2x_2x_3x_4 - 6x_1^2x_2^2x_4\,.$$

Helyettesítsük be mindegyik x_i helyére a négy határozatlanú σ_i elemi szimmetrikus polinomot, és adjuk meg az eredménynek egy olyan tagját, amelynek nem nulla az együtthatója.

2. Legyen $H(y_1, y_2, y_3) = 30y_1y_3^3 - y_2^5$. Helyettesítsük be mindegyik y_i helyére a megfelelő $\sigma_i(x_1, x_2, x_3)$ polinomot, és adjuk meg az eredmény egy nem nulla tagját.

3. ***(3.8.6)*** Ha egy három határozatlanú szimmetrikus polinom lexikografikusan legnagyobb tagja $x_1^2x_2^2x_3$, akkor lehet-e tagja $x_1x_2^3x_3$? Szerepelhet-e hatodfokú tag? Hány tag lehet legfeljebb? Amikor elemi szimmetrikusakkal írjuk föl, mi az eljárás első lépése?

4. ***(2.7.14)*** Írjuk föl az elemi szimmetrikus polinomokkal a $\sum_{1\le i\ne j\le n} x_i^2x_j$ polinomot.

5. ***(kötelező HF)*** Írjuk föl az elemi szimmetrikus polinomokkal s_4-et és s_5-öt.

6. ***(2.7.19)*** Mutassuk meg, hogy nem létezik végtelen sok olyan egytagú $P_1, P_2, \ldots$ n-változós polinom, melyekre $P_1 \succ P_2 \succ \ldots$ teljesül. Igaz-e, hogy egy adott P_1 egytagú polinomnál csak véges sok lexikografikusan kisebb egytagú polinom lehet?

7. ***(2.7.17)*** Legyen f homogén k-adfokú szimmetrikus polinom, melyben minden határozatlan legfeljebb az m-edik hatványon szerepel. Mutassuk meg, hogy ha $\sigma_1^{k_1}\ldots\sigma_n^{k_n}$ nem nulla együtthatóval szerepel az f-nek az elemi szimmetrikus polinomokkal való fölírásában, akkor $k_1 + k_2 + \ldots + k_n \le m$ és $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = k$. Hogyan segítenek ezek a képletek az f polinom elemi szimmetrikus polinomokkal való előállításában?

8. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy páratlan prímekre fennáll a következő

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^{p-1} \equiv p + (p-1)! \pmod{p^2}.$$

---

9. ***(3.1.29)*** Igaz-e a $2x \mid 3x^2$ oszthatóság rendre a $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölötti polinomok körében?

10. ***(3.3.14)*** Bontsuk $6(x^2-2)(x^2+1)$-et $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára.

11. Bontsuk a $2x^4 - 4$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}$ és $\mathbb{R}$ fölött.

12. Bontsuk az $x^{12} - 4096$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{C}[x]$-ben és $\mathbb{R}[x]$-ben.

13. ***(3.3.21)*** Határozzuk meg a legfeljebb negyedfokú irreducibilis polinomokat $\mathbb{F}_2$ felett.

14. ***(3.9.22)*** Bontsuk az $x^{12} - 1$ polinomot irreducibilisek szorzatára $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_3$ és $\mathbb{F}_5$ felett.

---

15. ***(3.5.18)*** Annak felhasználásával, hogy $x^3 - 2$ irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, mutassuk meg, hogy $\sqrt[3]{4}$ nem írható föl $a + b\sqrt[3]{2}$ alakban, ahol $a, b \in \mathbb{Q}$.

16. Mutassuk meg, hogy az alábbi polinomok irreducibilisek $\mathbb{Q}$ fölött. Rajzoljuk le a Newton-poligonjukat is (alkalmas prím(ek)et használva). $6x^4 + 3x + 1$, $x^5 + 3x^4 + 36x^2 + 54x + 9$, $x^7 + 32$, $x^n + x^{n-1} + 3$, $x^n + 3x + 27$, $6x^6 + 3x^4 + 8x^3 + 72$.

17. ***(3.5.4)*** A Schönemann-Eisenstein kritérium az alábbi polinomok közül melyekre alkalmazható közvetlenül: $x^{11} + 2x + 18$, $x^{11} + 2x + 12$, $x^{11} + 12x + 5$, $x^{11} + n$ (mely n-ekre?).

18. ***(3.5.5)*** Legyen f racionális együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy f pontosan akkor irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, ha valamelyik eltoltja (vagyis az $f(x+c)$ polinom, ahol $c \in \mathbb{Q}$) irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Igazoljuk ennek segítségével, hogy x^4+1 irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

19. ***(3.5.15)*** Legyen p prím és $f(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{p-1}$. Alkalmazható-e az $f(x+1)$ polinomra a Schönemann-Eisenstein?

20. ***(3.5.16)*** Legyen $f(x,y) = x^9 + x^3y^3 + y^2 + y \in \mathbb{C}[x,y]$, és jelölje $\mathbb{C}(y)$ a $g(y)/h(y)$ alakú racionális törtfüggvényekből álló testet ($g, h \in \mathbb{C}[y]$).

(1) Primitív-e f, mint $\mathbb{C}[y]$ fölötti polinom?
(2) Következik-e a Schönemann–Eisenstein-tételből, hogy f irreducibilis $\mathbb{C}(y)$ fölött?
(3) Irreducibilis-e f a $\mathbb{C}[x,y]$-ban?

21. ***(*)*** Rajzoljuk le $y^2 + xy - x$ (mint y polinomjának) Newton-poligonját v_x-re nézve. Alkalmas n-re fejtsük $x^{1/n}$ hatványsorába az $y^2 + xy - x = 0$ egyenlet mindkét ($y_1(x)$, illetve $y_2(x)$) megoldását.

---

22. ***(3.3.19)*** Irreducibilis-e x^4+4 illetve x^4+9 a $\mathbb{Q}$ fölött? Általánosítsunk!

23. ***(3.3.24)*** Bontsuk fel $x^4 - 10x^2 + 1$-et $\mathbb{R}$ fölött felbonthatatlanok szorzatára (segítség: a polinomnak gyöke a $\sqrt{2}+\sqrt{3}$). A kapott felbontást, és az alaptétel egyértelműségi állítását kihasználva adjuk meg a $\mathbb{Q}$ fölötti felbontást is. Bizonyítsuk be, hogy ennek a polinomnak semelyik eltoltja sem teljesíti a Schönemann–Eisenstein-kritérium feltételét.

---

24. ***(3.5.9)*** Az $x^4 + x^2 + x + 1$-et $\mathbb{F}_2$ felett vizsgálva igazoljuk, hogy irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

25. ***(3.5.11)*** Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n-edfokú polinom, ahol $n \geq 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\overline{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

(1) Ha f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött, akkor $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött.
(2) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
(3) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.
(4) Ha $\overline{f}$ irreducibilis $\mathbb{F}_p$ fölött, és $\overline{f}$ foka n, akkor f irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.
(5) Ha f-nek van $\mathbb{Z}$ fölött k-adfokú tényezője, akkor $\overline{f}$-nak is van k-adfokú tényezője.
(6) Az előző állítás akkor, ha azt is tudjuk, hogy $\overline{f}$ foka n.

26. ***(3.5.15)*** Irreducibilisek-e az alábbi polinomok a $\mathbb{Q}$ test fölött? $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 3x - 2$, $3x^7 + x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $3x^7 - 6x^6 + 6x^2 + 2x - 2$, $x^{16}+1$, $x^{16}+2$, $x^4 - 14x^2 + 9$, $x^4 - x^2 + 1$, $3x^7 + 6x - 18$, x^5+4, x^3+9, x^5+729, $x^{10} - x^5 + 1$, $x^{20}+20$, x^4+25, x^6+32, x^4+4x+1, x^4-2x+1, x^4+x^3+1, x^4+x^3+4, $x^4+x^3+x^2+1$.

27. ***(**)*** Igazoljuk, hogy $x^n + x + 3$ minden $n > 1$ egész számra irreducibilis $\mathbb{Z}$ felett.

28. ***(3.4.20*)*** Legyen f egy n-edfokú egész együtthatós polinom. Mutassuk meg, hogy ha f helyettesítési értéke legalább $2n+1$ egész helyen prímszám, akkor f irreducibilis $\mathbb{Z}$ fölött.