Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat
Nyolcadik feladatsor

1. (a) Tegyük fel, hogy 2^k+1 prím valamely $k>0$ egészre. Mutassuk meg, hogy k egy 2-hatvány. (Az ilyen alakú prímeket *Fermat-prím*eknek nevezzük. Összesen öt Fermat-prímet ismerünk: $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, $2^{2^3}+1=257$ és $2^{2^4}+1=65537$. Megoldatlan, hogy van-e még, azt sejtjük, hogy valószínűleg nincs, vagy ha mégis van, akkor is csak véges sok.)
(b) Tegyük fel, hogy a^k-1 prím valamilyen $a,k>1$ egészekre. Igazoljuk, hogy $a=2$ és k prím. (Az ilyen alakú prímeket *Mersenne-prím*eknek nevezzük. Megoldatlan, hogy van-e végtelen sok Mersenne-prím, a jelenleg ismert legnagyobb $2^{82589933}-1$.)

2. Egy $n>0$ egész számot *tökéletes szám*nak nevezünk, ha n megegyezik a nála kisebb pozitív osztóinak összegével, azaz ha $\sigma(n)=2n$ (a $\sigma(n)$-ben n is szerepel összeadandóként. Az alábbiakban igazoljuk, hogy minde *páros* tökéletes szám $n=2^{p-1}(2^p-1)$ alakú, hol p és 2^p-1 is prím (azaz 2^p-1 egy Mersenne-prím). Megoldatlan, hogy létezik-e páratlan tökéletes szám.
(a) Igazoljuk, hogy ha 2^p-1 egy Mersenne-prím, akkor az $n=2^{p-1}(2^p-1)$ szám tökéletes.
(b) Tegyük fel, hogy n páros tökéletes szám és írjuk fel n-et 2^kt alakban, ahol t páratlan és $k\geq 1$. Mutassuk meg, hogy $t=(2^{k+1}-1)(\sigma(t)-t)$. Speciálisan $\sigma(t)-t\mid t$.
(c) Igazoljuk, hogy t-nek $\sigma(t)-t$-n és t-n kívül nem lehet más pozitív osztója, azaz t prím és $\sigma(t)=t+1$.
(d) Mutassuk meg, hogy $p:=k+1$ is prím, azaz $n=2^{p-1}(2^p-1)$ alakú, ahol $t=2^p-1$ prím.

3. Legyen n rögzített pozitív egész és tekintsük az $x^2-y^2=n$ diofantikus egyenletet. Mutassuk meg, hogy ennek pontosan akkor van megoldása, ha $n\not\equiv 2 \pmod 4$ és ezesetben a megoldásszám $2d(n)$, ha n páratlan, illetve $2d(\frac{n}{4})$, ha $4\mid n$.

4. Legyen $p>2$ prím. Igazoljuk, hogy a $2/p$ szám (az összeadandók sorrendjétől eltekintve) pontosan egyféleképpen írható fel két különböző pozitív egész reciprokának összegeként.

5. Oldjuk meg az $x^3+7x=y^3$ diofantikus egyenletet.

---

6. (a) Egy százlábú meg akarja számolni a lábait. Tudja, hogy legfeljebb 250 lába van. Ha 11-esével számolja, akkor 5 marad ki, ha 15-ösével, akkor 3. Hánylábú a százlábú?
(b) Egy másik százlábú is megirigyli ezt a módszert. Neki 12-esével számolva 4 marad, 15-ösével számolva 8. Mutassuk meg, hogy elszámolta.

7. Oldjuk meg az alábbi szimultán kongruenciákat:

$$(a)\quad \begin{aligned} x&\equiv 3 \pmod 5\\ x&\equiv 4 \pmod 7\end{aligned} \qquad (b)\quad \begin{aligned} x&\equiv 2 \pmod 5\\ x&\equiv 3 \pmod 6\\ x&\equiv 4 \pmod 8\end{aligned} \qquad (c)\quad \begin{aligned} 3x&\equiv 1 \pmod 4\\ 2x&\equiv 3 \pmod 5\\ 5x&\equiv 2 \pmod 7.\end{aligned}$$

8. Igazoljuk, hogy tetszőleges N természetes számra van olyan N egymást követő egész szám, melyek egyike sem négyzetmentes.

9. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a_1,a_2,a_3 egész számokhoz létezik végtelen sok olyan n természetes szám, amelyre a_1+n,a_2+n,a_3+n páronként relatív prímek.

10. Határozzuk meg az alábbi kongruenciák megoldásszámát:
(a) $x^{80}+x^3\equiv 8 \pmod{3^{20}}$;
(b) $x^{99}+x^3\equiv 8 \pmod{3^{20}}$;
(c) $x(x-1)(x-2)\equiv 0 \pmod{10^{20}}$.

11. ***(kötelezően beadandó HF)*** Oldjuk meg az $x^3-2x-1\equiv 0 \pmod{125}$ kongruenciát!

12. (a) Tegyük fel, hogy p páratlan prím és $p\nmid a$. Igazoljuk, hogy az $x^2\equiv a \pmod p$ kongruencia pontosan akkor oldható meg, ha az $x^2\equiv a \pmod{p^n}$ kongruencia minden $n\geq 1$-re megoldható.

(b) Legyen $a \equiv 1 \pmod 8$. Mutassuk meg, hogy az $x^2 \equiv a \pmod{2^n}$ kongruencia minden $n \geq 1$-re megoldható.

---

13. Adjunk meg olyan legfeljebb harmadfokú polinomot, amelyre $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(4) = 15$ és $f(-1) = 0$.

14. A Vandermonde-determináns felhasználásával adjunk új bizonyítást az interpolációs polinom létezésére és egyértelműségére.

15. ***(2.4.22)*** Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom minden racionális/valós helyen racionális/valós értéket vesz föl. Következik-e ebből, hogy f racionális/valós együtthatós?

16. ***(2.6.11)*** Általánosítsuk az interpolációt többhatározatlanú polinomokra. Mutassuk meg, hogy véges test esetében minden véges sok változós függvény polinomfüggvény.

17. ***(2.4.21*)*** Igazoljuk, hogy n egész alappont és egész értékek esetén akkor és csak akkor van egész együtthatós interpolációs polinom, ha az egyértelműen meghatározott legfeljebb $n-1$-ed fokú racionális együtthatós interpolációs polinom egész együtthatós.

18. ***(2.4.24*)*** Tegyük föl, hogy az $f \in \mathbb{C}[x]$ polinom foka n, és $n+1$ egymást követő egész helyen egész értéket vesz föl. Igazoljuk, hogy léteznek olyan $c_0, \ldots, c_n$ egész számok, hogy

$$f(x) = c_n \binom{x}{n} + \ldots + c_0 \binom{x}{0}, \quad \text{ahol} \quad \binom{x}{j} = \frac{x(x-1)\ldots(x-j+1)}{j!}.$$

19. ***(**)*** Legyen f egy egész együtthatós, normált polinom, melynek mindegyik komplex gyöke 1 abszolút értékű. Igazoljuk, hogy f mindegyik gyöke komplex egységgyök.

---

20. ***(2.5.7)*** Számítsuk ki x alábbi két polinomjának az együtthatóit: $(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)$ és $c(x-b_1)(x-b_2)(x-b_3)(x-b_4)$.

21. ***(2.5.14)*** Határozzuk meg a $2x^4 + 2x + 3$ polinom komplex gyökeinek összegét, szorzatát, négyzetösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét.

22. ***(2.5.15)*** A gyökök és együtthatók összefüggése alapján számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, négyzetösszegét és szorzatát.

23. ***(2.7.16)*** Legyenek a, b, c az $x^3 + 3x + 1$ polinom gyökei. Írjuk fel azt a harmadfokú polinomot, melynek gyökei a^2, b^2, c^2, illetve $a+b$, $a+c$, $b+c$.

24. ***(2.7.15)*** Határozzuk meg az $x^n + x + 1$ polinom (komplex) gyökeinek négyzetösszegét, köbösszegét, és a gyökök reciprokainak összegét ($n \geq 2$).

25. Fejezzük ki a másodfokú egyenlet együtthatóival a gyökök különbségének négyzetét.