Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Hetedik feladatsor

1. Írjuk fel $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ inverzében az első sor második elemét a ferde kifejtési tétel alapján.

2. Legyenek A, B, C olyan $n \times n$-es mátrixok, melyekre $\det A = 3$, $\det B = 6$, $\det C = 4$. Mennyi lesz az $A^3 B^{-1} C A^{-2}$ mátrix determinánsa?

3. Oldjuk meg a Cramer-szabállyal az $x + y = 1$, $x + 2y = 2$ egyenletrendszert.

4. Számítsuk ki az alábbi determinánsokat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & n \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x & a & \dots & a \\ a & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Legyen M egész számokból álló négyzetes mátrix. Igazoljuk, hogy M^{-1} akkor és csak akkor áll csupa egész számból, ha $\det M \in \{1, -1\}$.

6. ***(*)*** Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, és ε_j a $2\pi j/n$ szöghöz tartozó n-edik egységgyök. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi, úgynevezett ciklikus determináns értéke

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_0) f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_{n-1}).$$

7. ***(*)*** Legyen $p > 2$ prím, és tekintsük az $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{p-2} x^{p-2} \equiv 0 \pmod{p}$ kongruenciát, ahol $p \nmid a_0$. Bizonyítsuk be, hogy ez akkor és csak akkor megoldható, ha

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{p-2} \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-2} & a_0 & \cdots & a_{p-3} \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p}.$$

8. ***(*)*** Legyen K test, $A \in K^{k \times k}$, $B \in K^{m \times m}$, $X \in K^{k \times m}$ és 0 az $m \times k$-as nullmátrix. Rakjuk össze az M mátrixot ebből a négy blokkból a következőképpen: $M := \begin{pmatrix} A & X \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Igazoljuk, hogy $\det(M) = \det(A) \det(B)$.

9. ***(*)*** Legyenek A és B $n \times n$-es mátrixok a K test felett, I az $n \times n$-es egységmátrix, 0 pedig a nullmátrix. Az $\begin{pmatrix} A & I \\ 0 & B \end{pmatrix}$ blokkmátrixot megfelelően Gauss-eliminálva adjunk új bizonyítást a determinánsok szorzástételére.

---

10. Mely k egészekre létezik olyan derékszögű háromszög, melynek az oldalai egészek és az egyik oldala k hosszúságú?

11. Bizonyítsuk be, hogy a $4^s(8k + 7)$ alakú számok $(k, s \in \mathbb{Z}^{\geq 0})$ nem állnak elő 3 négyzetszám összegeként.

12. Mutassuk meg, hogy végtelen sok olyan háromtagú számtani sorozat létezik, amelynek tagjai relatív prímek és mindhárom elem négyzetszám.

13. ***(*)*** (a) Mutassuk meg, hogy két nemnulla négyzetszám összege és különbsége nem lehet egyszerre négyzetszám.

(b) Igazoljuk, hogy az $x^4+y^2=z^4$ egyenletnek nem létezik pozitív egész megoldása. Speciálisan $n=4$-re a Fermat-egyenletnek sincs nemtriviális egész megoldása.

---

14. Igazoljuk, hogy multiplikatív számelméleti függvény összegzési függvénye multiplikatív. Igaz-e a megfordítás? És multiplikatív helyett additívval?

15. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket minden $n>1$ egészre és határozzuk meg, mikor áll fönn egyenlőség:

(a) $\sigma(n)\varphi(n) \le n^2-1$
(b) $\sigma(n)+\varphi(n) \ge 2n$
$(c)^*$ $\sigma(n)\varphi(n) > n^2/2$
$(d)^*$ $\inf \frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2} = \frac{1}{\zeta(2)} (= \frac{6}{\pi^2})$.

16. (a) Mutassuk meg, hogy multiplikatív számelméleti függvények konvolúciója is multiplikatív. Ha f és g számelméleti függvények, akkor *konvolúciójuk* az a $h=f*g$ függvény, melyre $h(n)=\sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$.

(b) Igazoljuk, hogy $\sum_{d|n}\sigma(d)\varphi(\frac{n}{d}) = nd(n)$.

17. Legyen $s>1$ esetén

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

a Riemann-féle zeta-függvény. Igazoljuk az alábbiakat:

(a) A $\zeta(s)$-et definiáló sor konvergens $s>1$ esetén.
(b) A $\prod\limits_{p \text{ prím}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} := \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{p\le n \text{ prím}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$ limesz létezik (a „végtelen szorzat konvergens”) és $\zeta(s) = \prod\limits_{p \text{ prím}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$.
(c) $\frac{1}{\zeta(s)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$.
(d) $\zeta(s)^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$.

Megjegyzés: ha $f\colon \mathbb{Z}^{>0} \to \mathbb{C}$ egy tetszőleges számelméleti függvény, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ sort (amilyen s-re konvergens) az f Dirichlet-sorának nevezzük. A Riemann-zetát definiáló Dirichlet sor $s\in\mathbb{C}$ esetén is konvergens, ha $\mathrm{Re}(s)>1$. Sőt, $\zeta(s)$ kiterjeszthető $s\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$-re komplex differenciálható módon. A Riemann-sejtés szerint ha $\zeta(s)=0$ és $0<\mathrm{Re}(s)<1$, akkor $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$.

18. ***(*)*** Adjunk meg 2017 különböző egész számot, amihez a φ-függvény ugyanazt az értéket rendeli.

19. ***(*)*** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $K>0$ egészhez végtelen sok olyan $n>0$ egész található, amelyre $d(n-1)-d(n)>K$ és $d(n+1)-d(n)>K$ egyidejűleg teljesül.

20. ***(*)*** Mutassuk meg, hogy tetszőleges $K>0$ egészhez végtelen sok olyan $n>0$ egész található, amelyre $d(n)-d(n-1)>K$ és $d(n)-d(n+1)>K$ egyidejűleg teljesül.

21. ***(*)*** Legyen f egy tetszőleges számelméleti függvény, legyen $\tilde{f}$ a megfordítási függvénye, és képezzük az $n\times n$-es

$$A = \begin{pmatrix} f((1,1)) & f((1,2)) & \cdots & f((1,n)) \\ f((2,1)) & f((2,2)) & \cdots & f((2,n)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f((n,1)) & f((n,2)) & \cdots & f((n,n)) \end{pmatrix}$$

mátrixot, ahol (i,j) az i és j számok legnagyobb közös osztóját jelenti. Mutassuk meg, hogy $\det A = \tilde{f}(1)\tilde{f}(2)\cdots\tilde{f}(n)$.