Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat
Hatodik feladatsor

1. Határozzuk meg Cardano képletének felhasználásával, hogy az $x^3-3px+2$ egyenletnek mely p valós értékek esetében van 1, 2, illetve 3 valós gyöke.

2. ***(3.8.6)*** Oldjuk meg: $x^3-6ix-i+8=0$, $x^3+12x-16i=0$, $x^3-21x+20=0$, $x^4+x^2+4x-3=0$.

3. ***(3.8.7)*** Keressük meg az $f(x)=x^4-10x^2+1$ polinom harmadfokú rezolvensének mindhárom gyökét. Hogyan változik f felbontása két másodfokú szorzatára, ha a rezolvensnek más-más gyökét használjuk?

4. ***(3.8.8*)*** Legyen $f(x)=x^4+px^2+qx+r=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$, ahol $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{C}$. Igazoljuk a következő állításokat.

(1) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$.
(2) Az f harmadfokú rezolvense $g(x)=8(x-u_1)(x-u_2)(x-u_3)$, ahol
$$u_1=(\alpha_1\alpha_2+\alpha_3\alpha_4)/2,\quad u_2=(\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_4)/2,\quad u_3=(\alpha_1\alpha_4+\alpha_2\alpha_3)/2.$$
(3) Ha a megoldási eljárásban az $u=u_1$ gyököt használjuk, akkor az f másodfokúakra történő felbontásának tényezői $(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$ és $(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)$ lesznek.
(4) $2u_1-p=(\alpha_1+\alpha_2)^2$.
(5) $q=(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)$.
(6) $u_1^2-r=(\alpha_1\alpha_2-\alpha_3\alpha_4)^2/4$.
(7) Ha $\alpha_1+\alpha_2=\alpha_3+\alpha_4=0$, akkor $u_1^2-r=(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2/4$.

5. Igazoljuk, hogy az x^4+px^2+qx+r polinomnak pontosan akkor van többszörös gyöke, amikor a harmadfokú rezolvensének.

---

6. ***(4.2.25)*** Adjuk meg az alábbi hat permutáció ciklusfelbontását és előjelét.
$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&5&6&1&4&3&8&7\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&7&6&4&8&3&2&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}a&b&c&d&e\\c&a&e&b&d\end{bmatrix}$$
$$(1234)(35)(1432)(35)\,,\quad (12345)(234)(12345)^{-1}\,,\quad [(12)(23)(34)]^{1222}\,.$$
Tegyük meg ugyanezt a $\begin{bmatrix}1&2&\dots&n\\n&n-1&\dots&1\end{bmatrix}$ „hátulról előre” permutációval is.

7. Bizonyítsuk be, hogy $(12\cdots k)=(21)(32)\cdots(k,k-1)$, illetve hogy $(12\cdots k)=(1,k)(1,k-1)\cdots(12)$.

8. Hány különböző hatványa van az $f=(12)(34)(567)$ permutációnak? Mely n és k egész számokra lesz $f^k=f^n$?

9. ***(4.8.14)*** Mutassuk meg, hogy ha $(x_1\dots x_k)$ egy ciklus az S_n csoportban, és $f\in S_n$, akkor $f\circ\big(x_1\dots x_k\big)\circ f^{-1}=\big(f(x_1)\dots f(x_k)\big)$.

10. Rendezhetők-e a könyvek a könyvespolcon ha csak szomszédos könyvek cseréjét engedjük meg?

11. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Mely $f\in S_n$ permutációk cserélhetők föl az $(1,2,\dots,n)$ ciklussal?

12. ***(4.2.30)*** Igazoljuk, hogy minden páros permutáció hármasciklusok szorzata.

13. Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor páros, ha ciklusfelbontásában a páros hosszú ciklusok száma páros.

14. ***(4.2.32)*** Igazoljuk, hogy egy permutáció pontosan akkor hatványa egy ciklusnak, ha diszjunkt ciklusfelbontásában a ciklusok hossza azonos (az egyelemű ciklusok nélkül).

15. Igazoljuk, hogy S_n minden eleme előáll legfeljebb $n-1$ transzpozíció szorzataként.

16. ***(4.2.33*)*** Legyen G irányítatlan gráf az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmazon. Tekintsük a gráf éleinek megfelelő cseréket. Mutassuk meg, hogy ezek segítségével akkor és csak akkor kapható meg minden permutáció, ha G összefüggő.

17. ***(4.2.35*)*** Tegyük fel, hogy k és t egynél nagyobb, relatív prím egészek. Az $1, 2, \ldots, n$ számok $1, 2, \ldots, n$ sorrendjéből kiindulva tetszőleges két olyan elemet fölcserélhetünk, amelyek különbsége k vagy t. Bizonyítsuk be, hogy ilyen lépések egymásutánjával akkor és csak akkor juthatunk el minden lehetséges sorrendhez, ha $k + t - 1 \le n$.

18. ***(*)*** 17 rab van egy börtönben. Mindegyikük homlokára egy egész számot ragasztanak úgy, hogy ezek páronként különbözők legyenek. Mindenki látja a többiek számát, de a sajátját nem. Egy adott jelre minden rab felemeli a bal- vagy a jobb kezét. Ezután ha mindannyian tudják a számok nagyság szerinti sorrendjét, akkor mindet elengedik – egyébként kivégzik őket. A rabok előzetesen összebeszélhetnek. Ki tudnak-e jutni a börtönből?

---

19. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

20. Egy determináns egyik kifejtési tagját tükrözzük a determináns mellékátlójára. Hogyan változik meg a megfelelő permutációban az inverziók száma?

21. Ha egy $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mátrixra $\det A = 5$, akkor mennyi $\det(A + A)$?

22. Egy 2023×2023-es determináns minden sora számtani sorozat. Számítsuk ki a determinánst.

23. Legyen M egy 3×3-as valós mátrix, melyre $M^T = -M$. Mutassuk meg, hogy a determinánsa nulla. A 3 helyett milyen n egészekre lesz biztosan igaz az analóg állítás?

24. Igazoljuk, hogy ha egy komplex elemű determinánsban $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ minden i, j-re, akkor a determináns értéke valós.

25. Egy (egészegyütthatós) determinánsban minden oszlopösszeg osztható 7-tel. Bizonyítsuk be, hogy a determináns értéke is osztható 7-tel.

26. Igazoljuk, hogy ha egy $n\times n$-es mátrixban van egy $m\times k$-as téglalap csupa nullákból, és $m+k > n$, akkor a mátrix determinánsa nulla.

---

27. ***(*)*** Igazoljuk, hogy a vezéregyesek száma nem függ a Gauss-elimináció módjától.

28. ***(*)*** Igazoljuk, hogy ha M egy nilpotens mátrix (azaz valamelyik hatványa 0), akkor $I - M$ invertálható (itt I az egységmátrix).