

Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Ötödik feladatsor

1. Az AB , BA , BC , $CB - C$ műveletek közül végezzük el az elvégezhetőket, ha

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

2. Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehetséges: $A + A$, $A + B$, AB , AC , AC^T , DD^T , $D^T D$, $AC + 2C$, $AD - 3D$, D^2 , BC , CB . Itt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = (-1 \quad -2 \quad -3), \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3. Adjunk meg olyan 10×10 -es $A \neq B$ mátrixokat és egy 10×100 -as $C \neq 0$ mátrixot, amelyekre $AC = BC$ teljesül. Meg lehet-e adni az $A \neq B$ mátrixokat úgy is, hogy ez **minden** 10×100 -as C -re teljesüljön?

4. Számítsuk ki az 5×5 -ös $N = ((n_{ij}))$ mátrix első öt hatványát, ahol $n_{ij} = 1$, ha $i - j = 1$, és 0 egyébként. Tegyük fel, hogy egy $n \times n$ -es $M = ((m_{ij}))$ mátrix főátlójában és ez alatt csupa nulla van (azaz $m_{ij} = 0$ ha $i \geq j$). Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

5. Bizonyítsuk be, hogy két felső háromszög-mátrix szorzata is felső háromszög-mátrix, és hogy ezek részgyűrűt alkotnak. Mi áll a szorzat diagonálisában?

6. Ha $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} N = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, akkor mi az N mátrix második sorának harmadik eleme?

7. (**Kötelezően beadandó HF**) Adjuk meg azokat az $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixokat, melyekre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} A = A^T \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

8. Számítsuk ki az alábbi szorzatokat.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

9. Jelölje $E^{(ij)}$ azt a mátrixot, amelynek i -edik sorában a j -edik elem 1, és minden más eleme 0. Mi történik, ha egy mátrixot balról illetve jobbról megszorozunk $E^{(ij)}$ -vel? Van-e olyan 3×3 -as A mátrix, amellyel a balszorzás tetszőleges 3×3 -as X mátrix első sorának elemeit megkétszerezi, az X többi elemét pedig ellentettjére változtatja? Van-e ilyen A akkor, ha balszorzás helyett jobbról akarunk szorozni?

10. Az M és N mátrixok **felcserélhetőek**, ha $MN = NM$. Keressük meg az összes olyan háromszor hármas mátrixot, amely az $E^{(23)}$ -mal felcserélhető (lásd az előző feladatot). Melyek azok az $n \times n$ -es mátrixok, amelyek **minden** $n \times n$ -es mátrixszal felcserélhetőek?

11. Mely mátrixokkal felcserélhetőek ezek a mátrixok: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$?

12. (*) Igazoljuk, hogy ha $M, N \in \mathbb{C}^{n \times n}$, akkor $MN - NM$ nem lehet az egységmátrix.

13. Legyen $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy $M^2 - (a + d)M + (ad - bc)E = 0$.

14. Adjuk meg $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben az $X^2 = I$, $X^2 = -E$, $X^2 = 0$ és $X^2 = X$ egyenletek minél több megoldását!

15. Invertáljuk Gauss-elimináció segítségével az alábbi mátrixokat. Ellenőrizzük szorzással a kapott eredményeket. Írjuk fel a harmadik és a negyedik mátrix inverzét a ferde kifejtési tételből kapott képlet segítségével is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16. Adjunk ellenpéldát a következő állításra: invertálható mátrixok összege is invertálható.

17. Egy mátrix első két sorát megcseréljük. Hogyan változik meg az inverze?

18. Döntsük el, melyek igazak az alábbi következtetések közül.

- (1) Ha az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása.
- (2) Ha az $A\mathbf{x} = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek létezik nem triviális megoldása, akkor az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek létezik egynél több megoldása.
- (3) Ha $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^5$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^5$ -re létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.
- (4) Ha $A \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^6$, és az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, akkor bármely $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^6$ -ra létezik megoldása az $A\mathbf{x} = \mathbf{c}$ egyenletrendszernek is.

19. (5.11.1*) Igazoljuk, hogy $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ -nek nemkommutatív részgyűrűjét alkotják a $\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$ alakú mátrixok, ahol $z, w \in \mathbb{C}$. Bizonyítsuk be, hogy ez ferdetest, és keressünk benne (minél több) \mathbb{C} -vel izomorf részttestet.

20. (5.1.32**) Ha egy egységelemes gyűrűben $1 - ab$ invertálható, akkor $1 - ba$ is.

21. (**) Igazoljuk, hogy minden véges nullosztómentes gyűrű ferdetest (azaz egységelemes és minden $\neq 0$ elemnek van kétoldali – multiplikatív – inverze).

22. (*)
- a) : Az $\{1, 2, 3, \dots, 2n\}$ számok közül maximum hány választható ki úgy, hogy nincs köztük kettő, amelyek relatív prímek?
 - b) : Az $\{1, 2, 3, \dots, 6n\}$ számok közül maximum hány választható ki úgy, hogy bármely három között van kettő, amelyik nem relatív prím egymáshoz?