Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Negyedik feladatsor

1. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat:

a) : $26x \equiv 39 \pmod{46}$;
b) : $24x \equiv 60 \pmod{51}$;
c) : $100x \equiv 88 \pmod{116}$;
d) : $555x \equiv 5555 \pmod{55555}$;
e) : $(2^k + 1)x \equiv 2^{k+1} + 1 \pmod{2^{k+2} + 1}$;
f) : $10x^{39} + 8x^{20} + 9x^3 + 7x \equiv 0 \pmod{19}$;
g) : $13x^{41} \equiv 27 \pmod{100}$.

2. Határozzuk meg 3^{42} legkisebb pozitív maradékát 29-cel osztva.

3. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

a) : Az $ax \equiv b \pmod{m}$ megoldásszáma legfeljebb b, ha $b > 0$.
b) : Ha az $ax \equiv b \pmod{m}$ kongruencia megoldható, akkor az $a^2x \equiv b^2 \pmod{m^2}$ kongruencia is.
c) : Ha az $a_ix \equiv b_i \pmod{m_i}$ kongruenciák megoldhatók ($i = 1, 2$), akkor az $a_1a_2x \equiv b_1b_2 \pmod{m_1m_2}$ kongruencia is.

4. Egy szigeten 7- és 11-fejű sárkányok élnek. Egy arratévedt királyfi le akarta győzni az összeset, ezért megszámolta, hány feje van a sárkányoknak összesen (hogy tudja, mire vállalkozik).

(1) Hány sárkány él a szigeten, ha összesen 118 fejük van?
(2) Hány sárkány van, ha 75 fejet számolt?
(3) 59 fejet számolt. Igazoljuk, hogy elszámolta.
(4) Most számolás előtt levágta az összes sárkánynak 1-1 fejét és ezután 40 fejet számolt. Hány sárkány lehetett összesen?

5. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Bolondóciában csak 47 és 79 forintos bankjegyek léteznek. Hányféleképpen lehet pontosan 10000 forintot kifizetni (úgy, hogy nincs visszajáró)?

6. A síkon hány rácspontot tartalmazhat egy a) racionális; b) irracionális meredekségű egyenes?

7. Adjuk meg a $6x + 10y + 15z = 7$ diofantikus egyenlet összes megoldását.

8. Legyenek a és b rögzített, relatív prím, 1-nél nagyobb egészek.

a): Határozzuk meg azt a legnagyobb pozitív egész számot, ami nem áll elő $ax + by$ alakban, ahol x és y végigfut a nemnegatív egész számokon.
b*): Hány olyan pozitív egész van, ami nem áll elő a fenti alakban?

---

9. **a) :** Mi az utolsó számjegye $73^{73} + 37^{37}$-nek?
b) : Mi az utolsó 2 darab számjegye az előbbi számnak?

10. Bizonyítsuk be, hogy ha $11 \mid a^{100} + b^{100} + c^{100}$, akkor $11^{100} \mid a^{100} + b^{100} + c^{100}$ is teljesül.

11. Mutassuk meg, hogy minden $n > 2$-re $\varphi(n)$ páros.

12. Igazoljuk, hogy ha p prím és $a^p \equiv b^p \pmod{p}$, akkor $a^p \equiv b^p \pmod{p^2}$.

13. Bizonyítsuk be, hogy 561 álprím, azaz nem prímszám, mégis teljesül rá a kis-Fermat tétel:

$$\forall a\text{-ra: } a^{561} \equiv a \pmod{561}.$$

Keressünk további álprímeket.

14. Legyen p egy prímszám, $r_1, \ldots, r_p$ pedig egy teljes maradékrendszer modulo p. Igazoljuk, hogy $r_1^{2p-3}, \ldots, r_p^{2p-3}$ is teljes maradékrendszer modulo p.

15. **a) :** Igazoljuk, hogy n^2+1 alakú szám minden páratlan osztója $4k+1$ alakú.
b) : Mutassuk meg, hogy végtelen sok $4k+1$ alakú prím van.

16. ***(*)*** **a):** Igazoljuk, hogy ha n páros és előáll két négyzetszám összegeként, akkor $\frac{n}{2}$ is előáll két négyzetszám összegeként.
b): Legyen $p = a^2 + b^2$ prím, ahol $a, b \in \mathbb{Z}$. Tegyük fel, hogy $p \mid n$ és n előáll két négyzetszám összegeként. Igazoljuk, hogy $\frac{n}{p}$ is előáll két négyzetszám összegeként.
c): Mely számok állnak elő két négyzetszám összegeként?

17. ***(*)*** Mely p prímekre lesz

$$\frac{2^{p-1}-1}{p}$$

négyzetszám?

18. ***(*)*** Igazoljuk, hogy minden k pozitív egészhez van olyan n, amelyre $\varphi(n) = \varphi(n+k)$.

19. ***(*)*** Adjunk meg 2017 különböző egész számot, amihez a φ-függvény ugyanazt az értéket rendeli.

---

20. A Gauß-elimináció (vagy a józan ész) segítségével oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Ugyanazok a megoldások adódnak-e, ha a valós, ill. ha a komplex számok körében keressük a megoldásokat?

$$a)\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 &= 2 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 &= 3 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{cases}$$

21. Vegyük egy lineáris egyenletrendszer összes lehetséges megoldásában előforduló x_1 értékek H halmazát. Bizonyítsuk be, hogy H vagy az üres halmaz, vagy egyelemű, vagy egyenlő a K testtel.

22. A

$$\begin{aligned} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 &= 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 &= 0 \end{aligned}$$

lineáris egyenletrendszerben a változók mely halmazai játszhatják a szabad változók szerepét?