Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Harmadik feladatsor

1. Mivel egyenlő i^{1919} és $1 + i + \ldots + i^{1919}$?

2. ***(1.5.22)*** Számítsuk ki az n-edik egységgyökök összegét, szorzatát és négyzetösszegét.

3. ***(1.5.15)*** Az 1, -1, i, $1+i$, $(1+i)/\sqrt{2}$, $\cos(\sqrt{2}\pi) + i\sin(\sqrt{2}\pi)$, $\cos(336°) + i\sin(336°)$ számoknak mennyi a rendje? Melyek egységgyökök? Mely n-ekre lesznek ezek a számok n-edik egységgyökök? És primitív n-edik egységgyökök?

4. ***(1.5.18)*** Ha ε primitív 512-edik egységgyök, mennyi lehet $o(-i\varepsilon)$?

5. ***(1.5.17)*** Mutassuk meg, hogy ha $n > 0$ egész, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, és $\varepsilon^n = i$, akkor $4 \mid o(\varepsilon) \neq \infty$.

6. ***(1.5.19)*** Ha ε rendje osztható néggyel, mi lesz $-\varepsilon$ rendje?

7. ***(1.5.20)*** Szorozzuk össze a hatodik egységgyököket a negyedik egységgyökökkel az összes lehetséges módon. Hány különböző számot kapunk?

8. ***(1.5.21)*** Legyenek m és n pozitív egészek. Mik $x^n = 1$ és $x^m = 1$ közös gyökei? Igazoljuk, hogy egy m-edik és egy n-edik egységgyök szorzata mn-edik egységgyök. Milyen (m,n) párokra lesz egy primitív n-edik és egy primitív m-edik egységgyök szorzata primitív mn-edik egységgyök? Hozzuk ki ebből, hogy az Euler-féle φ-függvény multiplikatív, azaz $(m,n) = 1$ esetén $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$.

9. ***(2.5.12)*** Mutassuk meg, hogy ha két n-edfokú polinom n helyen megegyezik, és a főegyütthatóik egyenlők, akkor a polinomok is egyenlők. Írjuk fel $x^n - 1$ gyöktényezős alakját.

10. ***(2.5.15)*** Számítsuk ki az egységsugarú körbe írt szabályos n-szög egy csúcsából az összes többi csúcsba húzott szakaszok hosszának szorzatát.

11. ***(2.1.12**)*** Ha p prím és $S = \sum_{j=0}^{p-1} \varepsilon^{j^2}$, ahol ε primitív p-edik egységgyök, mennyi S^2?

---

12. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal a 623 és 854 egész számok legnagyobb közös osztóját. Írjuk fel a közös osztót $623x + 854y$ alakban, ahol x és y egész számok.

13. $a)$**:** Hány olyan u, v egész számpár van, amelyre $(a,b) = au + bv$?
$b)$**:** Az $(a,b) = au + bv$ előállításban mi u és v legnagyobb közös osztója?

14. Legyenek a és b különböző pozitív egészek. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
$a)$**:** Végtelen sok n egészre $(a+n, b+n) = 1$.
$b)$**:** Végtelen sok n egészre $(a+n, b+n) = (b+n, bn) = 1$.
$c)$**:** Végtelen sok n egészre $(a+n, bn) = (b+n, bn) = 1$.

15. ***(3.2.16)*** Osszuk el maradékosan az $x^3 - 2$ polinomot $2x^2 + 2x - 3$-mal.

16. ***(3.2.23)*** Mi a maradék, ha $x^4 + x^2 + 1$-et osztjuk $x^2 + x + 1$-gyel? Az eredményt indokoljuk meg számolás nélkül is, majd vizsgáljuk meg, hogy $x^{2n} + x^n + 1$ mikor osztható $x^2 + x + 1$-gyel.

17. ***(3.2.24)*** Mi a maradék, ha $x^{64} + x^{54} + x^{14} + 1$-et osztjuk $x^2 + 1$-gyel, illetve $x^2 - 1$-gyel?

18. Az $f(x) : (x^2 + 1)$ maradékos osztásnál a maradék $x + 1$. Határozzuk meg $f(i)$ értékét.

19. ***(3.2.17)*** Állapítsuk meg az $f(x) = 3x^3 + 6x^2 + 6x + 3$ és a $g(x) = 2x^4 + 2x^2 + 2$ polinomok kitüntetett közös osztóját az euklideszi algoritmussal.

20. Mi lesz $x^5 + 1$ és $x^{15} - 1$ legnagyobb közös osztója?

21. ***(3.3.15)*** Mi az $x^n - 1$ és $x^m - 1$ polinomok legnagyobb közös osztója?

22. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Mutassuk meg, hogy $n > 0$, $k > 0$, $a > 1$ egészek esetén

$$(a^n - 1, a^k - 1) = a^{(n,k)} - 1 \ .$$

23. Tekintsük a véges tizedestörtek V gyűrűjét.

a)**:** Határozzuk meg az egységeket és a felbonthatatlanokat V-ben.
b)**:** Bizonyítsuk be, hogy V-ben érvényes a számelmélet alaptétele.

24. Igazoljuk, hogy ha az n pozitív egész szám nem 3^k alakú, akkor a következő szám összetett:

$$1 + 2^n + 4^n.$$

25. ***(*)*** Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$\left(5 + \sqrt{26}\right)^n$$

tizedestört alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő.

26. ***(*)*** Legyen f_n a Fibonacci sorozat n-edik tagja (azaz $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ ha $n \geq 1$). Igazoljuk, hogy $f_k \mid f_n$ akkor és csak akkor, ha $k \mid n$ vagy $k = 2$. Továbbá $f_{(n,k)} = (f_n, f_k)$.

27. Adjunk meg végtelen sok olyan n-et, amelyre $29 \mid 2^n + 5^n$.

28. Tekintsük oszthatósági szempontból az $S = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűt az egész számok helyett. Hogy érdemes definiálni a norma és konjugált fogalmát? Igazoljuk a következőket:

(1) $\overline{\alpha \cdot \beta} = \overline{\alpha} \cdot \overline{\beta}$;
(2) $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$;
(3) $\alpha \mid \beta$ akkor és csak akkor, ha $\overline{\alpha} \mid \overline{\beta}$;
(4) Ha $\alpha \mid \beta$, akkor $N(\alpha) \mid N(\beta)$ az egészek között ;
(5) ε egység S-ben akkor és csak akkor, ha $N(\varepsilon) = \pm 1$.
(6) Végtelen sok egység van S-ben.
(7)* Határozzuk meg az összes egységet S-ben.
(8)* Igazoljuk a számelmélet alaptételét S-ben.

29. ***(*)*** a)**:** Definiáljuk az oszthatóságot az $S = \{a + b\sqrt{5} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűben. Mutassunk egy elemet S-ben, amely felbonthatatlan, de nem prímszám.

b)**:** Az $S' = \{a + b\frac{1+\sqrt{5}}{2} : \ a, b \in \mathbb{Z}\}$ számkörben viszont igaz a számelmélet alaptétele: ugyanazok a felbonthatatlanok, mint a prímek.