Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Második feladatsor

1. Halhatatlan kapitánynak három halhatatlan unokája van, akiknek az életkora három különböző prímszám, és ezek négyzetösszege is prímszám. Hány éves a kapitány legkisebb unokája?

2. Oldjuk meg a prímszámok körében a

$$p^2 - 2q^2 = 1$$

egyenletet.

3. Igazoljuk, hogy $2^n \mid (n+1)(n+2)\cdots(2n)$.

4. *(*)* Határozzuk meg a $\binom{2n}{1}, \binom{2n}{3}, \ldots, \binom{2n}{2n-1}$ számok legnagyobb közös osztóját.

---

5. ***(Racionális gyökteszt.)*** Legyen $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ és tegyük fel, hogy a p/q racionális szám ($q \neq 0$, $(p,q) = 1$) gyöke az $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ polinomnak. Igazoljuk, hogy $p \mid a_0$ és $q \mid a_n$.

6. Igazoljuk, hogy $x^2 + bx + c$-nek pontosan akkor van kétszeres gyöke, ha $b^2 = 4c$.

7. Ha egy harmadfokú polinomnak van kétszeres gyöke, akkor hány (valós) gyöke van? Hány valós gyök lehet, ha a polinom negyedfokú?

8. Mutassuk meg, hogy az $x^3 + px + q$ polinomnak akkor és csak akkor van legalább kétszeres gyöke, ha $27q^2 + 4p^3 = 0$.

9. *(*)* Bizonyítsuk be, hogy a $\sum_{k=0}^{n} x^k/k!$ polinomnak nincs többszörös gyöke.

10. ***(3.6.11**)*** Melyek azok a polinomok, amelyek oszthatók a deriváltjukkal?

---

11. ***(1.3.11)*** Végezzük el az alábbi műveleteket: $(1+i)(3-2i)$, $1/i$, $(1+i)/(3-2i)$, $|\overline{(4+i)}/(4+i)|$, $|(1+1526i)^{100}/(1-1526i)^{100}|$, $(1+i)^2$, $(1+i)^{1241}$, $(-1+i\sqrt{3})^3$.

12. Igazoljuk, hogy $z \in \mathbb{C}$ abszolút értéke akkor és csak akkor 1, ha z reciproka megegyezik a konjugáltjával. Mely $z \in \mathbb{C}$ esetén felcserélhető a képzetes rész és a konjugált képzése?

13. ***(1.3.14)*** Oldjuk meg $\mathbb{C}$-ben: $x = (3+2i)\overline{x}$; $x = 2\operatorname{Re}(x)$; $\operatorname{Re}(x) = x + \overline{x}$.

14. Tegyük föl, hogy $(x+iy)^n = 3+2i$ (itt $x, y \in \mathbb{R}$). Mennyi lesz ekkor $(x^2+y^2)^n$?

---

15. ***(1.3.12)*** Oldjuk meg az alábbi egyenleteket: $x^2+1=0$, $x^2=-12$, $x^2+2x+2=0$, $x^2+2ix-1=0$. Írjuk is föl a megfelelő polinomokat gyöktényezős alakban $\mathbb{C}$ fölött.

16. ***(1.3.13)*** Határozzuk meg azokat a $c+di$ számokat, melyek négyzete $20i-21$. Oldjuk meg az $x^2+(i-2)x+(6-6i)=0$ egyenletet.

---

17. ***(1.4.2, 1.4.8)*** Hozzuk trigonometrikus alakra: $1 \pm i$, $\sqrt{3}+i$, $-1-\sqrt{3}i$, $\cos(30°)-i\sin(60°)$, $\cos\alpha - i\sin\alpha$, $\sin\alpha + i\cos\alpha$, $(1+\sin\alpha+i\cos\alpha)(1+\sin\alpha-i\cos\alpha)^{-1}$, $(1+i\operatorname{tg}\alpha)/(1-i\operatorname{tg}\alpha)$. Mennyi $\left(1+\sin(\pi/5)+i\cos(\pi/5)\right)^5 + i\left(1+\sin(\pi/5)-i\cos(\pi/5)\right)^5$ és $4\cos(\pi/5)\sin(\pi/10)$?

18. ***(1.5.14)*** Oldjuk meg az $x^3 = 2$ és az $x^4 = -9$ egyenleteket a komplex számok között. Adjuk meg az $x^8 = \sqrt{3} - i$, $x^n = -1$ egyenletek összes megoldását is.

19. ***(2.5.10)*** Írjuk föl az x^4+4 polinomot gyöktényezős alakban, és ellenőrizzük beszorzással az eredményt. Bontsuk a polinomot valós együtthatós polinomok szorzatára.

20. ***(1.5.24)*** Fejezzük ki $\cos x$ és $\sin x$ segítségével $\sin 7x$-et.

21. ***(1.5.23)*** Hozzuk „zárt alakra” a következő összeget:

$$\binom{1867}{0}+\binom{1867}{4}+\binom{1867}{8}+\binom{1867}{12}+\dots.$$

---

22. ***(1.4.9)*** Rajzoljuk le a komplex síkon a következő halmazokat: $\{z : \mathrm{Re}(z+2i) \le -2\}$, $\{z : \mathrm{Re}(z+1) \ge \mathrm{Im}(z-3i)\}$, $\{z : |z-i-1| \le 3\}$, $\{z : |z-3+2i| = |z+4-i|\}$, $\{z : z+\overline{z} = -1\}$, $\{z : 2z+5 = 2\overline{z}\}$, $\{z : 1/z = \overline{z}\}$, $\{z : (1/z)+8 = \overline{z}\}$, $\{z : |z| = iz\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}((z-1)/(z+1)) = 0\}$, $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}((z-1)/(z+1)) = 0\}$.

23. ***(1.4.10)*** A sík mely geometriai transzformációinak felelnek meg a komplex számok halmazának alábbi leképezései: $z \mapsto 3z+2$, $z \mapsto (1+i)z$, $z \mapsto 1/\overline{z}$.

24. ***(Kötelezően beadandó HF)*** Igazoljuk, hogy egy paralelogramma oldalai hosszának négyzetösszege ugyanaz, mint az átlói hosszának négyzetösszege, és fogalmazzuk meg a megfelelő komplex azonosságot.

25. Egy medvesajtos dobozban a hat (60°-os) körcikkből három maradt, amik elmozdulhattak, de úgy, hogy csúcsuk továbbra is a doboz középpontjában van, a három A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 ív pedig a doboz szélére illeszkedik ebben a sorrendben. Igazoljuk, hogy a B_1A_2, B_2A_3, B_3A_1 szakaszok (tehát nem az ívek!) felezőpontjai szabályos háromszöget alkotnak.

26. ***(1.4.14, 1.4.15**)*** Mutassuk meg, hogy a z_1, z_2, z_3, z_4 páronként különböző komplex számok pontosan akkor vannak egy körön vagy egy egyenesen, ha kettősviszonyuk, azaz

$$(z_1z_2z_3z_4) = \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}\Big/\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2} \in \mathbb{R}\ .$$

Igazoljuk Ptolemaiosz tételét: ha egy négyszög oldalainak hossza a, b, c, d, átlóinak hossza e és f, akkor $ac+bd \ge ef$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha a négyszög (konvex) húrnégyszög.

27. ***(**)*** Az

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \ne 0)$$

függvényeket törtlineáris függvényeknek nevezzük. Ez az egyetlen ∞ szimbólummal kiegészített számsíkon (vagy ha úgy tetszik a komplex számgömbön) is értelmezhető (hogyan?). Igazoljuk, hogy a fenti f függvény akkor és csak akkor képezi a komplex egységkört saját magára úgy, hogy a kör belseje a kör belsejére képződik, ha felírható a következő alakban:

$$f(z) = k\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} \qquad (|k|=1, |\alpha|<1).$$

Keressünk olyan törtlineáris függvényt, amely az egységkörvonalat a valós tengelyre, belsejét a felső félsíkra képezi. Igazoljuk, hogy kör képe is, egyenes képe is egyenes vagy kör minden törtlineáris leképezésnél (azaz kögyenes képe kögyenes; az egyenesek a ∞-en átmenő körök).

28. ***(*)*** Milyen alakzatot alkotnak azok a z pontok a komplex számsíkon, melyekre teljesül, hogy $(z-i)i/(z-1)$ negatív valós szám?

29. ***(**)*** Legyen $A \ne B$ két pont a síkon és C_λ azon P pontok mértani helye a síkon, melyekre $PA/PB = \lambda$, ahol λ egy pozitív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy C_λ egy kör, ha $\lambda \ne 1$ (Apollóniusz-kör), és határozzuk meg a középpontját és a sugarát. Mi a helyzet, ha $\lambda = 1$? Bizonyítsuk be, hogy C_λ merőleges minden A-t és B-t összekötő egyenesre és körre.

---

30. ***(**)*** Legyen z_0 a $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$ $(a_k \in \mathbb{C})$ polinom gyöke. Bizonyítsuk be, hogy $|z_0| \le \zeta$, ahol ζ a $z^n - |a_{n-1}|z^{n-1} - \dots - |a_0|$ polinom egyetlen pozitív zérushelyét jelöli.

31. ***(**)*** Legyen $0 < p_n < p_{n-1} < \dots < p_0$. Bizonyítsuk be, hogy a $p_nz^n + \dots + p_1z + p_0$ polinomnak nincsen gyöke a $|z| \le 1$ egységkörlapon.