Bsc Algebra és számelmélet gyakorlat

Első feladatsor

Előadáskivonat, feladatsorok, követelmények:

`https://zabradi.web.elte.hu/algebra_es_szamelmelet_2023-24o.html`

A K1.2.4 jelölés a Kiss Emil: *Bevezetés az algebrába* ingyen letölthető könyvre utal, az így jelölt feladatok megoldásai is elérhetők a fenti honlapon. **Konzultáció** a hivatalos fogadóórákon kívül is kérhető emailben.

Gyakorlati jegy. A két **évfolyamzárthelyit** legalább **20 + 20** pontosra kell megírni (minden feladat 10 pont, mindkét ZH-n 7 feladat lesz); ha ez nem sikerül, akkor a gyakorlatvezető engedélye esetén a félév végén javító zárthelyit lehet írni. A házi feladatokból szintén 20 pontot kell elérni legalább (mindegyik HF 5 pontos, minden héten lesz egy kötelezően beadandó). A csillagos feladatokat is be lehet adni, ezek is 5-5 pontot érnek, de a minimumfeltételbe nem számítanak bele. Részletek, időpontok a fenti honlapon.

1. Mennyi lehet egy szám négyzetének a

- hármas maradéka?
- négyes maradéka?
- ötös maradéka?

2. Mely p egész számokra lehet p, $p+2$ és $p+4$ egyszerre prím?

3. Tegyük fel, hogy az (a, b, c számjegyekből álló) $\overline{abc}$ háromjegyű szám osztható 37-tel. Mutassa meg, hogy ekkor a $\overline{bca}$ szám is osztható 37-tel.

4. Egy sokszög átlóinak száma prímszám. Hány oldalú a sokszög?

5. Határozzuk meg azokat az n természetes számokat, melyekre n^4+4 prímszám.

6. Igazoljuk, hogy végtelen sok $a)$ $4k+3$, $b)$ $6k+5$ alakú prím van.

7. Bizonyítsuk be, hogy minden N természetes számra létezik N darab egymást követő összetett szám.

8. Mely p prímekre lesz p^{p-1} osztója $(p-1)^p+1$-nek?

9. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan nemkonstans egész együtthatós $f(x)$ polinom, amely az x változó minden egész értékére prímet vesz fel.

10. *(*)* Bizonyítsa be, hogy létezik végtelen sok olyan n természetes szám, amelyre $n \mid 2^n+1$ teljesül.

11. *(*)* Bizonyítsuk be hogy $k\ell+1$ darab pozitív egész szám közül mindig vagy kiválasztható $k+1$ darab olyan, amelyek közül egyik sem osztója a másiknak, vagy pedig $\ell+1$ darab olyan, amelyek sorbarakhatók úgy, hogy mindegyik szám osztója a következő számnak.

---

12. Végezzük el az alábbi műveleteket a polinomok körében, és állapítsuk meg az eredmény fokát: $(x^3+3x^2+2)-(x^3+3x-4)$, $(x^2+2x+3)(x^2+3)$.

13. Mi lesz a 20-adfokú tag együtthatója a $(2x^{10}+x^5-1)(x^{20}+x^{15}-x^7+3x)$ polinomban?

14. Egy tizedfokú és egy n-edfokú polinom összege ötödfokú. Mik n lehetséges értékei?

15. ***(*)*** Igazoljuk, hogy $x \mapsto \sin(x)$, illetve $x \mapsto 1/x$ $(x \neq 0)$ nem polinomfüggvény.

---

16. Emeljük ki az $x-1$ gyöktényezőt az x^3-7x+6 polinomból, majd határozzuk meg az összes gyökét.

17. ***(2.4.14)*** A Horner-elrendezés segítségével döntsük el, hogy az $f(x)=x^6-4x^4+x^3-x^2+4$ polinomnak gyöke-e a 2 szám, és írjuk is fel $f(x)$-et $(x-2)g(x)+f(2)$ alakban.

18. Iterált Hornerrel írjuk fel az $f(x)=2x^5-6x^4+5x^3-4x^2+3x-3$ polinomot $(x-1)$ polinomjaként, azaz keressük meg azt a $g(x)$ polinomot, melyre $f(x)=g(x-1)$.

19. ***(2.4.16)*** Az n-edfokú $f(x)$ polinomba behelyettesítjük a b számot. Hány szorzásra van szükség $f(b)$ kiszámításához, ha egyáltalán nem trükközünk; ha a b hatványait előre kiszámoljuk; ha a Horner-elrendezést használjuk?

20. ***(2.4.20)*** Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, melyre $f(10)=400$, $f(14)=440$ és $f(18)=520$?

21. ***(2.4.26)*** Ha az $f \in \mathbb{Z}[x]$ polinom négy különböző egész helyen is felveszi az 5 értéket, akkor felveheti-e egy egész helyen a 12-t?

---

22. ***(2.5.11)*** Hányszoros gyöke az x^4-x^3-x+1 polinomnak az 1? (Iterált Horner). Határozzuk meg a deriváltjának a gyökeit is.

23. Adjunk példát olyan 1640 fokú polinomra, melynek az 1 pontosan tízszeres, a -1 pedig pontosan 20-szoros gyöke.

24. Ha az 1 (pontosan) ötszörös gyöke f-nek és hatszoros gyöke g-nek, akkor hányszoros gyöke $f+g$-nek, illetve $f+g+fg$-nek?

---

25. ***(3.3.16)*** Adjuk meg a $2x^3+3x+5$ polinom racionális gyökeit.

26. Határozzuk meg azt a c számot, melyre a $6x^4+x^3+23x^2+4x+c$ polinomnak gyöke az 1/3, majd írjuk föl gyöktényezős alakban a kapott polinomot.

---

27. Legyen $f(x)=6x^4+35x^3+62x^2+35x+6$. Írjuk föl $f(x)/x^2$-et $x+(1/x)$ polinomjaként, majd keressük meg a gyökeit.

28. ***(*)*** Legyen $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$ páros fokú polinom, amely „feje tetejére állítva is önmaga”, azaz $a_i=a_{n-i}$ minden $0 \leq i \leq n$ esetén, és $a_0 \neq 0$. Mutassuk meg, hogy $f(x)/x^{n/2}$ felírható $x+(1/x)$ polinomjaként.

29. ***(3.5.8*)*** Legyen $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n \in \mathbb{R}[x]$, ahol a_0 és a_n nem nulla, és $g(x)=a_n+a_{n-1}x+\ldots+a_0x^n$. Igazoljuk, hogy a g polinom $\mathbb{R}$-beli gyökei pontosan az f gyökeinek a reciprokai (multiplicitással számolva is).

---

30. ***(*)*** Legyenek $p_0,\ldots,p_{n-1}$ nemnegatív valós számok, nem mind nulla. Bizonyítsuk be, hogy a $z^n-p_{n-1}z^{n-1}-\cdots-p_1z-p_0=0$ egyenletnek pontosan egy pozitív gyöke van.

31. ***(*)*** Hány hárommal **nem** osztható együtthatója van az $(x+1)^{730}$ polinomnak?