

Vizsgatémakörök (Algebra4 Matematikus)

A múlt félévhez hasonlóan a szóbeli vizsgán mindenki egy témakört kap az alábbiak közül (sorsolás után), amiből kérdeznek. Fontos, hogy mindent értsetek (bizonyításokat is), tudjatok példákat és ellenpéldákat mondani, tudjátok, hogy melyik lemma min mülk és a tételekhez hogy (és melyik lépésben) használtuk őket, ill. a tétel feltételeit. Felkészülési idő nincs, viszont a saját jegyzeteiteket végig használhatjátok (arra persze nincs idő, hogy ott helyben értsetek meg valamit, de tényszerű dolgokat ki szabad puskázni). Egy vizsgázóra 20 perc jut átlagosan. **A kézzel írt tételek bizonyítását csak az 5-ösért kell tudni. A tematikából mindenki kihagyhat egy témakört. Azt, hogy melyiket hagyjátok ki, a tételhúzás előtt kell jelezni.**

1. Testbővítések, fokszám tétel, egyszerű bővítések szerkezete, olyan bővítés létezése, amiben egy adott polinom gyöktényezőik szorzatára bomlik. Tökéletes testek jellemzése a p -Frobeniusszal.
2. Relatív testhomomorfizmusok, $\text{Hom}_K(K(\alpha), L)$ jellemzése α minimálpolinomjának L -beli gyökeivel. K -homomorfizmusok kiterjesztése, szeparábilis bővítések. Szeparábilis elemek résztestet alkotnak. **Minden véges szeparábilis bővítés egyszerű.**
3. Galois bővítések, ekvivalens jellemzések. Nevezetes bővítések Galois-csoportja. Szeparábilis polinom felbontási teste Galois-bővítés. A Galois-elmélet főtétele.
4. Véges testek szerkezete, multiplikatív csoportja, bővítések Galois-csoportja. Wedderburn tétele véges ferdetestek kommutativitásáról. **A kvadratikus reciprocitási tétel.**
5. Geometriai szerkesztések algebrai elmélete. Szerkeszthetőség ekvivalens jellemzése a Galois-csoport segítségével, nevezetes szerkesztési feladatok.
6. Radikálbővítések, gyökkifejezések. Ha a K alaptest tartalmazza az n -edik egységgyököket és az L/K bővítés Galois-csoportja n -edrendű ciklikus, akkor $L = K(\sqrt[n]{a})$ alkalmas $a \in K$ -ra. „Egy polinom gyökei erős gyökkifejezések” \Leftrightarrow „Galois-csoportja feloldható”.
7. Egész elemek gyűrűbővítésben részgyűrűt alkotnak. Algebrailag zárt test fölött az n változós polinomgyűrű minden maximális ideálja ponthoz kötött. **Hilbert nullhelytégele**, a Zariski topológia definíciója.
8. Féligegyszerű modulusok ekvivalens jellemzése. Féligegyszerű gyűrűk jellemzése modulusok projektivitásával és injektivitásával.
9. Gyűrű Jacobson-radikáljának ekvivalens definíciói, Nakayama-lemma. **Egy gyűrű pontosan akkor (bal-) féligegyszerű, ha (bal-) Artin és Jacobson-radikálja 0.**
10. Schur-lemma, **Jacobson-féle sűrűségi tétel**. Wedderburn tétele végesdimenziós egyszerű algebrákról.
11. Test fölötti algebrák tenzorszorzata. Két mátrixgyűrű tenzorszorzata is mátrixgyűrű. Centrális egyszerű algebrák. L/K véges bővítés, A végesdimenziós K -algebra esetén „ A centrális egyszerű” \Leftrightarrow „ $A \otimes_K L$ centrális egyszerű”.
12. Oppozit centrális egyszerű algebrával vett tenzorszorzat hasad. Ha egy A n -edfokú centrális egyszerű algebra tartalmaz egy n -edfokú L résztestet, akkor A hasad L fölött. **Minden n -edfokú centrális egyszerű algebra tartalmaz n -edfokú szeparábilis résztestet.** Frobenius tétele \mathbb{R} fölötti végesdimenziós nullosztómentes algebrákról.