Algebra4 matematikus szakirány

Dolgozat 2021. április 15.

Minden feladat 10 pontot ér, a dolgozatra csak pontszámot adok, jegyet nem. Az elégségeshez a dolgozatból legalább 15 pontot és a házi feladatokkal együtt legalább 35 pontot kell elérni. Ha a minimumkövetelmények teljesülnek, akkor a házi feladatokkal együtt 55 ponttól közepes, 75 ponttól jó, 95 ponttól jeles a gyakorlati jegy. A dolgozat írása közben mindenkinél legyen **bekapcsolva a kamera/mikrofon és legyen bent a teams értekezletben**! Írott segédeszköz használható, de a dolgozatírás közben másokkal bármilyen módon kommunikálni tilos. 120 perc van a megoldásra.

1. Hány elemű $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[14]{64}), \mathbb{Q}(\sqrt[7]{4}))$?

2. Határozzuk meg az $x^8 + 1$ polinom felbontási testét $\mathbb{F}_3$ fölött.

3. Határozzuk meg a $\sqrt{3} + i$ szám minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött (itt $i^2 = -1$). Mely p prímekre lesz ez a polinom irreducibilis modulo p?

4. Legyen $p \equiv q \equiv 3 \pmod 4$ két prímszám. Mutassuk meg, hogy $\frac{\sqrt{p}+\sqrt{q}}{2}$ algebrai egész.

5. Határozzuk meg az $x^3 - 2i$ polinom felbontási testének Galois csoportját $\mathbb{Q}(i)$ fölött (itt $i^2 = -1$).

6. Legyen ε egy primitív 21-edik egységgyök. Határozzuk meg $\mathbb{Q}(\varepsilon)$ másodfokú résztesteit (azaz azon $\mathbb{Q} \le K \le \mathbb{Q}(\varepsilon)$ közbülső testeket, melyekre $|K : \mathbb{Q}| = 2$).

7. Legyen K egy p karakterisztikájú test és α algebrai K fölött. Igazoljuk, hogy a $K(\alpha)/K$ bővítés pontosan akkor szeparábilis, ha $K(\alpha) = K(\alpha^p)$.