Algebra4 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2021. április 22.

1. Nevezzük egy M modulus $L \leq M$ részmodulusát *lényegesnek* (angolul: essential, jel.: $L \leq_e M$), ha minden $0 \neq N \leq M$ részmodulusra $L \cap N \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy minden $N \leq M$ részmodulushoz van olyan $N' \leq M$ részmodulus, melyre $N \cap N' = 0$ és $N \oplus N' \cong N + N'$ lényeges részmodulusa M-nek.

2. Legyen M egy R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{soc}(M) = \bigcap_{L \leq_e M} L$.

3. Mutassuk meg, hogy az M modulus pontosan akkor féligegyszerű, ha nincs valódi lényeges részmodulusa.

4. Egy G csoport *talpa* alatt a minimális normálosztói által generált részcsoportot értjük (jel.: $\operatorname{soc}(G)$). Bizonyítsuk be, hogy $\operatorname{soc}(G)$ *karakterisztikus egyszerű* csoportok direkt szorzata (azaz olyan csoportoké, amiknek nincsen nemtriviális karakterisztikus részcsoportja).

5. Igazoljuk, hogy
   - (i) Izomorf egyszerű csoportok direkt szorzata karakterisztikusan egyszerű.
   - (ii) Ha a G karakterisztikusan egyszerű csoportnak van minimális normálosztója (pl. G véges), akkor G izomorf egyszerű csoportok direkt szorzata.

6.
   - $(i)^*$ Mutassunk példát olyan karakterisztikusan egyszerű csoportra, aminek nincs minimális részcsoportja.
   - $(ii)^*$ Mutassunk példát olyan modulusra, aminek nincs egyszerű részmodulusa.

---

7. (beadandó) Legyen K test. Mi a K feletti $n \times n$-es felsőháromszög-mátrixok gyűrűjének Jacobson-radikálja?

8. Igazoljuk, hogy $J(R/J(R)) = 0$.

9. Mutassuk meg, hogy $J(R)$ tartalmaz minden nilpotens balideált.

10.* Igazoljuk, hogy $J(R)$-ben nincs nem nulla idempotens elem.

11.* Igazoljuk, hogy egységelemes gyűrű Jacobson-radikálja csak akkor lehet direkt összeadandó, ha 0.

12.* Adjunk példát olyan nem végesen generált M modulusra alkalmas R gyűrű felett, amire nem igaz a Nakayama lemma állítása.