

Algebra4 matematikus szakirány

8. gyakorlat
2021. április 8.

1. (beadandó HF) A magma kalkulátora segítségével (<http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>) találjunk olyan $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ötödfokú polinomot, hogy f (\mathbb{Q} fölötti) felbontási testének Galois csoportja az A_5 alternáló csoport. Nem kell bizonyítani, hogy tényleg az a Galois csoport, elég leírni a példát (a cél, hogy játsszatok vele).
2. Legyen $I = (x^2, xy^2) \triangleleft \mathbb{C}[x, y]$. Határozzuk meg a $\mathbb{V}(I) \subset \mathbb{C}^2$ halmazt és az $\mathbb{I}(\mathbb{V}(I)) \triangleleft \mathbb{C}[x, y]$ ideált.
3. Azonosítsuk az n -edfokú normált egyváltozós komplex polinomok terét \mathbb{C}^n -nel (tehát $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \leftrightarrow (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$). Igazoljuk, hogy azon polinomok, melyeknek van többszörös gyöke egy Zariski zárt halmazt alkotnak \mathbb{C}^n -ben.
4. Azonosítsuk az $n \times k$ -as komplex mátrixok halmazát \mathbb{C}^{nk} -val a szokásos koordinátázással. Igazoljuk, hogy az alábbi részhalmazok algebraiak (Zariski zártak):
 - (a) A szinguláris (nem-invertálható) mátrixok ($n = k$).
 - (b) A legfeljebb r rangú mátrixok ($r \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$).
 - (c) Az 1-determinánsú mátrixok $SL_n(\mathbb{C})$ csoportja ($n = k$).
 - (d) Azon mátrixok, melyeknek van többszörös sajátértéke ($n = k$).
5. Mutassuk meg, hogy \mathbb{C}^n nem Hausdorff a Zariski-topológiában.
6. Igazoljuk, hogy \mathbb{C}^n tetszőleges nemüres Zariski-nyílt részhalmaza sűrű.
7. Igazoljuk, hogy algebrailag zárt test fölött a diagonalizálható mátrixok sűrűn vannak a Zariski-topológiában az összes mátrix között. Adjunk ennek segítségével új bizonyítást a Cayley–Hamilton-tételre.
8. Igazoljuk, hogy \mathbb{C}^n kompakt a Zariski-topológiában (azaz minden nyílt fedésből kiválasztható véges részfedés). Mj.: Az algebrai geometriában ezt a tulajdonságot *kvázikompaktnak* nevezik, mert a kompaktságra beleértik azt is, hogy a tér Hausdorff.
9. Mutassuk meg, hogy a \mathbb{C}^2 -en a Zariski topológia finomabb, mint a két Zariski topológia szorzat-topológiája $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ -n.
- 10.* Legyenek A és B végesdimenziós egységelemes (nem feltétlenül kommutatív) \mathbb{Q} -algebrák és jelölje $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$ az algebrai számok testét. Igazoljuk, hogy ha létezik egy egységelemes $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} A \rightarrow \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} B$ homomorfizmus, akkor létezik egy egységelemes $\overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} A \rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} B$ homomorfizmus is.
- 11.* Legyen A egy végesdimenziós K -algebra (K végtelen test), M és N pedig végesen generált A -modulusok. Igazoljuk, hogy ha $\overline{K} \otimes_K M$ és $\overline{K} \otimes_K N$ izomorfak (mint $\overline{K} \otimes_K A$ -modulusok), akkor $M \cong N$ (mint A -modulusok).
- 12.* Mutassuk meg, hogy a $\{(z, e^z) \in \mathbb{C}^2 \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^2$ halmaz nem algebrai.