Algebra4 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2021. március 25.

1. A következő számok közül melyek algebrai egészek? $\sqrt{5}/\sqrt{2}$, $(1+\sqrt{3})/2$, $(\sqrt{3}+\sqrt{7})/2$, $\frac{3+2\sqrt{6}}{1-\sqrt{6}}$, $(1+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{100})/3$, $2\cos(2\pi/19)$.

2. Igazoljuk, hogy ha α^n algebrai egész valamely $\alpha \in \mathbb{C}$-re és $n \geq 1$ egészre, akkor α is algebrai egész.

3. Mutassuk meg, hogy $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ nem egészre zárt.

4. Határozzuk meg az algebrai egészeket a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testben, ha $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes.

5. Legyen $\mathcal{O}$ a $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ testben az egészek gyűrűje ($d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes) és $p \nmid 2d$ egy prím. Igazoljuk, hogy p pontosan akkor prímtulajdonságú $\mathcal{O}$-ban, ha $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$. Mi a helyzet, ha $p \mid d$? És ha $p = 2$?

6. Legyen $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ egy harmadfokú normált polinom, aminek nincs többszörös gyöke. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - f(x))$ gyűrű egészre zárt. Ez egy nehéz feladat, némi segítség:

   (*a*) Legyen $R = \mathbb{C}[x,y]/(y^2 - f(x))$ és K a hányadostest. Vegyünk egy $\frac{a}{b} \in K$ elemet ($a, b \in R$, $b \neq 0$) és legyen $I = \{r \in R \mid r\frac{a}{b} \in R\}$. Mutassuk meg, hogy $I \lhd R$ és $I = R \iff \frac{a}{b} \in R$.

   (*b*) Ha $I \neq R$, akkor benne van egy maximális ideálban. Ez a maximális ideál egy $P = (u, v)$ ponthoz kötött, és P rajta van az $y^2 = f(x)$ egyenletű E (elliptikus) görbén (azaz $v^2 = f(u)$).

   (*c*) A feltétel, hogy f-nek nincs többszörös gyöke azzal ekvivalens, hogy E minden pontja *sima*, azaz $P \in E$ esetén a $(\frac{\partial(y^2-f(x))}{\partial x}(P), \frac{\partial(y^2-f(x))}{\partial y}(P))$ érintővektor nem a nullvektor.

   (*d*) Mutassuk meg, hogy az, hogy „hányszoros gyöke/pólusa van" $\frac{a}{b}$-nek a P pontban jóldefiniált, ha P egy sima pont a görbén. Ha $\frac{a}{b}$ gyöke egy R-beli együtthatós normált polinomnak, akkor jussunk ellentmondásra a racionális gyökteszthez hasonlóan.

7. Igazoljuk, hogy a $\mathbb{C}[x,y]/(y^2 - x^3)$ gyűrű nem egészre zárt.

8. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ egy irreducibilis normált polinom. Tegyük fel, hogy f $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének Galois-csoportja Abel és $f(\alpha) = 0$ valamilyen $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ számra. Igazoljuk, hogy f összes többi (komplex) gyöke is 1 abszolútértékű.

9.* Igazoljuk, hogy ha α egy olyan algebrai egész szám, melynek az összes Galois-konjugáltja 1 abszolútértékű, akkor α egységgyök.

10.* Határozzuk meg az algebrai egészeket a $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ testben.

11.* Ebben a feladatban azt igazoljuk, hogy ha R egy egészre zárt gyűrű, akkor $R[x]$ is az.

   (*a*) Először vezessük vissza a feladatot arra, hogy $R[x]$ egészre zárt $K[x]$-ben. ($K[x]$ benne van $R[x]$ hányadostestében és egészre zárt, hiszen főideálgyűrű.)

   (*b*) Igazoljuk, hogy ha $f, g \in K[x]$ normált polinomok, melyekre $fg \in R[x]$, akkor f és g is $R[x]$-ben van. (Segítség: bontsuk mindkét polinomot gyöktényezők szorzatára egy bővebb testben.)

   (*c*) Ha egy $f \in K[x]$ gyöke egy $R[x]$ feletti k fokú normált polinomnak, akkor $f + x^N$ is gyöke egy ugyancsak k fokú normált polinomnak. Növeljük N-et és a normált polinom (melynek $f + x^N$ gyöke) konstans tagja felírható két normált polinom szorzataként, melyek közül az egyik épp $f + x^N$.