Algebra4 matematikus szakirány

3. gyakorlat

2021. február 25.

1. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i)/\mathbb{Q}$ Galois. Határozzuk meg a Galois-csoportját, a közbülső testeket és döntsük el, hogy ezek közül melyik Galois.

2. Határozzuk meg az alábbi polinomok $\mathbb{Q}$ feletti felbontási testének Galois-csoportját: $x^6 - 2$, $(x^3 - 2)(x^2 - 2)$, $x^4 - 5x^2 + 6$, $x^4 - 7$, $x^8 - 1$.

3. Igazoljuk, hogy $x^5 - 4x + 2$-nek pontosan 3 valós gyöke van és $\mathbb{Q}$ fölött irreducibilis. Ha $G \leq S_5$ a Galois-csoport, akkor G tartalmaz 5-ödrendű elemet és transzpozíciót is (komplex konjugálás!), ezért $G = S_5$.

4. Igazoljuk, hogy az $x^4 - 2$ és az $x^4 + 2$ polinomoknak ugyanaz a felbontási teste. Mutassuk meg, hogy viszont az $x^4 - 5$ és $x^4 + 5$ polinomoknak nem ugyanaz a felbontási teste. Határozzuk meg $x^4 + 5$ felbontási testének Galois csoportját.

5. Igazoljuk, hogy egy 4-edfokú szeparábilis bővítésnek csak 0, 1, vagy 3 valódi közbülső teste lehet.

6. Legyen K egy 0 karakterisztikájú test. Mutassuk meg, hogy egy f polinom felbontási testének Galois-csoportja pontosan akkor van benne a gyökökön ható alternáló csoportban, ha f diszkriminánsa négyzetelem K-ban.

7. Legyen f egy 4-edfokú polinom a K 0-karakterisztikájú test fölött. Igazoljuk, hogy f felbontási teste fölött az f harmadfokú rezolvense is gyöktényezők szorzatára bomlik.

8. Az előző két feladatot felhasználva mutassuk meg, hogy $x^4 + 2x + 2$ $\mathbb{Q}$ fölötti felbontási testének S_4 a Galois-csoportja. Továbbá $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$-nak nincs nemtriviális közbülső teste, ha $\alpha^4 + 2\alpha + 2 = 0$.

9. Ebben a feladatban azt mutatjuk meg, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt. Vegyünk egy $\mathbb{C} \leq K$ véges bővítést. Feltehetjük (miért?), hogy $K/\mathbb{R}$ Galois. Legyen $G := \mathrm{Gal}(K/\mathbb{R})$ és $H \leq G$ a G egyik 2-Sylow részcsoportja. Igazoljuk, hogy $|K^H : \mathbb{R}|$ páratlan, ezért $|K^H : \mathbb{R}| = 1$, hiszen minden páratlan fokú valós polinomnak van valós gyöke (Bolzano). Mivel $\mathbb{C}$-ben minden másodfokú $\mathbb{C}[x]$-beli polinomnak van gyöke, ezért $K = \mathbb{C}$.

10. Legyen $K \leq \mathbb{C}$ egy tetszőleges résztest, és $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olyan K felett algebrai elemek, melyeknek K fölötti foka egymáshoz relatív prím. Igazoljuk, hogy $K(\alpha, \beta) = K(\alpha + \beta)$.

11.* (Artin) Legyen G egy tetszőleges véges csoport, ami automorfizmusokkal hat az F testen. Tegyük fel továbbá, hogy ez a hatás *hű*: ha $g \in G$ identikusan hat F-en, akkor $g = 1$. Igazoljuk, hogy F^G egy résztest F-ben, melyre F/F^G egy Galois-bővítés, és $\mathrm{Gal}(F/F^G) = G$.

12.* (Dedekind) Legyen F/K egy véges bővítés, és $K \leq L$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_K(F, L)$ elemei lineárisan függetlenek L felett, azaz ha $a_\tau \in L$ ($\tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)$) olyan, amire

$$\sum_{\tau \in \mathrm{Hom}_K(F,L)} a_\tau \tau(\alpha) = 0$$

minden $\alpha \in F$-re, akkor $a_\tau = 0$ minden $\tau \in \mathrm{Hom}_K(F, L)$-re. Ennek segítségével adjunk új bizonyítást a $|\mathrm{Hom}_K(F, L)| \leq |F : K|$ egyenlőtlenségre.