Algebra4 matematikus szakirány

2. gyakorlat

2021. február 18.

1. Hány eleme van $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}),\mathbb{C})$-nek? és hány olyan eleme van, ami $\sqrt{2}$-t $(-\sqrt{2})$-be viszi?

2. Hány olyan eleme van $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\sqrt[6]{5}),\mathbb{C})$-nek, ami $\sqrt[3]{5}$-t $\varepsilon\sqrt[3]{5}$-be viszi, ahol ε egy primitív harmadik egységgyök? Hová viszik ezek a $\mathbb{Q}$-homomorfizmusok $\sqrt[6]{5}$-t?

3. Keressünk olyan n egész számot, melyre a $\sqrt{3}+n\sqrt{5}, -\sqrt{3}+n\sqrt{5}, \sqrt{3}-n\sqrt{5}, -\sqrt{3}-n\sqrt{5}\in\mathbb{C}$ számok mind különbözők. Igazoljuk, hogy ekkor $\mathbb{Q}(\sqrt{3},\sqrt{5})=\mathbb{Q}(\sqrt{3}+n\sqrt{5})$.

4. (beadandó HF) Találjunk olyan $\alpha\in\mathbb{C}$ komplex számot, melyre $\mathbb{Q}(\alpha)=\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2},\sqrt{3})$.

---

5. Igazoljuk, hogy a mod p együtthatós racionális törtfüggvények $\mathbb{F}_p(x)$ teste nem tökéletes.

6. Legyen $L=\mathbb{F}_p(x,y)$ (kétváltozós racionális törtfüggvények), $K=\mathbb{F}_p(x^p,y^p)$. Igazoljuk, hogy nincs olyan $\alpha\in L$, melyre $L=K(\alpha)$.

7. Legyen $K\leq L$ p-karakterisztikájú testeknek egy véges bővítése. Igazoljuk, hogy minden $\alpha\in L$-re van olyan $n\geq 0$, melyre α^{p^n} szeparábilis K felett.

8. Igazoljuk, hogy tökéletes test minden algebrai bővítése tökéletes.

9. Tegyük föl, hogy $K\leq L$ p-karakterisztikájú testeknek egy bővítése úgy, hogy L tökéletes ($p>0$ prím). Igazoljuk, hogy K elemeinek p-hatványadik gyökei L-ben egy K-t tartalmazó tökéletes testet alkotnak(, ráadásul ez a legszűkebb ilyen részteste L-nek). Ha L a K algebrai lezártja, akkor ezt a testet hívjuk K tökéletes lezártjának (perfection).

---

10. Legyen $f(x)\in K[x]$ egy n-edfokú polinom. Igazoljuk, hogy van olyan $K\leq L$ test, melyben f gyöktényezők szorzatára bomlik és $|L:K|\leq n!$. * Igaz-e, hogy az is elérhető, hogy a fokszám osztója legyen $n!$-nak?

11. Legyen K egy tetszőleges test. A K fölötti minden normált, irreducibilis $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ polinomhoz vegyük föl az $x_1^f,x_2^f,\ldots,x_n^f$ határozatlanokat, és jelölje R az így kapott $K[\ldots,x_i^f,\ldots]$ (végtelen sok határozatlanú) polinomgyűrűt. Tekintsük az összes
$$(-1)^j\sigma_j(x_1^f,\ldots,x_n^f)-a_{n-j}\in R$$
polinomot, ahol $1\leq j\leq n$ és f végigfutja a normált, irreducibilis polinomokat K fölött (σ_j a j-edik elemi szimmetrikus polinomot jelöli). Legyen I az általuk generált ideál R-ben. Mutassuk meg, hogy ez R-nek valódi ideálja (azaz $I\neq R$). Legyen $I\subseteq J$ maximális ideálja R-nek (lásd Krull tétele/Zorn lemma). Igazoljuk, hogy R/J algebrailag zárt test, melynek van K-val izomorf részteste. Továbbá R/J minden eleme algebrai K fölött. Ezt a testet nevezzük K algebrai lezártjának.

12.* Legyen L/K egy algebrai bővítése p-karakterisztikájú testeknek. Azt mondjuk, hogy L/K tisztán inszeparábilis, ha L minden K felett szeparábilis eleme K-ban van. Egy $\alpha\in L$-ről azt mondjuk, hogy tisztán inszeparábilis, ha $K(\alpha)/K$ tisztán inszeparábilis. Igazoljuk, hogy α pontosan akkor tisztán inszeparábilis, ha minimálpolinomja $x^{p^n}-a$ alakú ($a\in K$).

13.* Igazoljuk, hogy egy L/K algebrai bővítésben a tisztán inszeparábilis elemek (egy K-t tartalmazó) résztestet alkotnak.

14.* Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ (kétváltozós racionális törtfüggvények), $K = \mathbb{F}_p(x^p, y^p - y - x)$. Bizonyítsuk be, hogy $|L : K| = p^2$ és határozzuk meg az L/K bővítés maximális szeparábilis résztestét.

15.* Legyen $L = \mathbb{F}_p(x, y)$ mint előbb és $M = L(\alpha)$, ahol $\alpha^{p^2} = x\alpha^p + xy$. Bizonyítsuk be, hogy $|M : L| = p^2$ és M/L inszeparábilis. Viszont M/L L felett tisztán inszeparábilis elemei csak L elemei.

16.** Igazoljuk, hogy minden $g(T) \in \mathbb{F}_p[[T]]$ formális hatványsorra van olyan $f(T) \in \mathbb{F}_p[[T]]$, melyre $f(T) - f(T)^p = Tg(T)$. Mj.: Ez azt jelenti, hogy $(\mathrm{id} - \mathrm{Frob}_p)\colon \mathbb{F}_p[[T]] \to \mathbb{F}_p[[T]]$ képe éppen $T\mathbb{F}_p[[T]]$. Mi a magja ennek a leképezésnek?