Algebra4 matematikus szakirány

10. gyakorlat

2021. április 29.

1. Legyen M egy féligegyszerű R-modulus, E pedig egy egyszerű R-modulus. Tegyük föl, hogy M-et generálják az E-vel izomorf részmodulusai. Mutassuk meg, hogy ekkor minden $E' \leq M$ egyszerű részmodulus izomorf E-vel.

2. Legyen M egy féligegyszerű R-modulus és $\{E_i \mid i \in I\}$ az egyszerű R-modulusok izomorfiaosztályai. Igazoljuk, hogy ekkor $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$, ahol M_i az M-nek az E_i-hez tartozó homogén (főleg reprezentációelméletben aka. *izotipikus*) komponense, azaz $M_i = \langle E \leq M \mid E \cong E_i \rangle$ az E_i-vel izomorf részmodulusok által generált részmodulusa M-nek.

3. (a) Legyen R egy féligegyszerű gyűrű és $E \leq_R R$ egy minimális balideál (egyszerű bal részmodulus) és $r \in R$ tetszőleges. Mutassuk meg, hogy $Er = 0$ vagy $Er \cong E$ (mint bal R-modulusok).

   (b) Legyen R egy féligegyszerű gyűrű, és ${}_R R = \bigoplus_{i \in I} R_i$ az előző feladatban definiált homogén felbontás. Mutassuk meg, hogy R_i kétoldali ideál R-ben.

4. Legyen R egy féligegyszerű gyűrű és ${}_R R = \bigoplus_i R_i$ a homogén felbontás, ahol az R_i az E_i egyszerű modulushoz tartozó homogén komponens. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{ann}_R(E_i) = \bigoplus_{j \neq i} R_j$ és $R/\operatorname{ann}_R(E_i) \cong R_i$.

5. Legyen R tetszőleges gyűrű és E egy egyszerű R-modulus, továbbá $D := \operatorname{End}_R(E)$ az endomorfizmusgyűrű (ami ferdetest a Schur lemma miatt).

   (a) Tegyük fel, hogy $u_1, u_2, \ldots, u_n, \cdots \in E$ lineárisan független D fölött. Mutassuk meg, hogy ekkor
   $$\operatorname{ann}_R(u_1) \supsetneq \operatorname{ann}_R(u_1, u_2) \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{ann}_R(u_1, \ldots, u_n) \supsetneq \cdots .$$

   (b) Igazoljuk, hogy ha R bal-Artin, akkor E végesdimenziós vektortér D fölött.

6. (Wedderburn–Artin tétel) Legyen R egy féligegyszerű gyűrű és ${}_R R = \bigoplus_i R_i$ a homogén felbontás. Mutassuk meg, hogy ekkor $R_i \cong M_{n_i}(D_i)$, ahol $D_i = \operatorname{End}_R(E_i)$ és $n_i = \dim_{D_i} E_i$. Speciálisan R véges sok ferdetest fölötti mátrixgyűrű direktösszege.

7. (beadandó)

   (a) Mutassuk meg, hogy ha D egy ferdetest, akkor az $M_n(D)$ teljes ($n \times n$-es) mátrixgyűrű egyszerű, azaz nincs nemtriviális kétoldali ideálja.

   (b) Igazoljuk a Wedderburn–Artin tétel megfordítását, azaz hogy ferdetest fölötti mátrixgyűrűk véges direkt összege féligegyszerű.

8.* Legyen R bal-Artin. Igazoljuk, hogy ekkor van olyan $n \geq 1$ egész szám, hogy $J(R)^n = 0$ (azaz minden n-tényezős szorzat a $J(R)$ Jacobson radikál elemeiből 0).

9.* (Hopkins tétele) Legyen R bal-Artin. Mutassuk meg, hogy ${}_R R$-nek létezik véges kompozíciólánca, azaz olyan $0 = L_0 \lneq L_1 \lneq \cdots \lneq L_k = R$ balideálokból álló lánc, hogy L_i/L_{i-1} egyszerű R-modulus minden $i = 1, \ldots, k$-ra. Speciálisan minden bal-Artin gyűrű bal-Noether.