Algebra3 matematikus

gyakorló feladatok a 2. ZH-ra

1. Mi lehet egy négyelemű gyűrű additív csoportja? Határozzuk meg izomorfia erejéig az összes 4 elemű **egységelemes** gyűrűt.

2. Mutassuk meg, hogy ha egy R gyűrűben minden $a \in R$-re teljesül $a^2 = a$, akkor R kommutatív.

3. Legyen $R = M_2(\mathbb{R})$ a valós test feletti 2×2-es mátrixgyűrű, és M a 2×1-es oszlopvektorok tere, mint bal R-modulus. Határozzuk meg $\mathrm{Ann}_R(M)$-et és az $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in M$ elem annullátorát.

4. Adjunk meg egy izomorfizmust a $K[x,y]/(xy-1)$ és a $K[t,t^{-1}]$ gyűrűk között.

5. Adjunk példát olyan R gyűrűre, melyben minden végesen generált ideál főideál, de a gyűrű nem Noether.

6. Legyen G egy tetszőleges (végtelen) csoport és $h \in G$ véges rendű, $g \in G$ pedig végtelen rendű. Igazoljuk, hogy van G-ben olyan H részcsoport, mely maximális arra a tulajdonságra nézve, hogy $h \in H$ és $g \notin H$.

7. Adjunk meg olyan egyértelmű prímfaktorizációs tartományt, amelyben asszociáltság erejéig pontosan 2016 prímelem van.

8. Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{Z}[i]/(3+i) \cong \mathbb{Z}/(10)$. (Itt $\mathbb{Z}[i] = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$ a Gauß-egészek gyűrűje.)

9. Bontsuk prímtényezők szorzatára az Euler-egészek körében a $3+\sqrt{3}i$ számot.

10. Oldjuk meg az egész számok körében az $4x^2+1=y^5$ egyenletet.

11. Legyen M egy bal R-modulus. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_R({}_RR, M) \cong M$ (kommutatív R esetén mint R-modulusok, egyébként mint Abel-csoportok).

12. Legyen P egy végesen generált projektív modulus egy kommutatív R gyűrű fölött. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Hom}_R(P,R)$ is projektív R-modulus.

13. Legyen $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ véges Abel-csoportok egy egzakt sorozata és p egy prímszám. Igazoljuk, hogy ekkor a $0 \to A(p) \xrightarrow{f_p} B(p) \xrightarrow{g_p} C(p) \to 0$ sorozat is egzakt, ahol egy G Abel-csoportra $G(p)$ a G csoport p-hatvány rendű elemeinek halmazát jelöli, és a leképezéseket az A, B, és C közötti leképezések indukálják. Igaz marad-e az állítás, ha nem tesszük fel az Abel-csoportok végességét?