# Algebra3 matematikus

2. ZH – megoldások

2018. december 14.

1. Ha $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+b & 2a+b \\ 2c+d & 2c+d \end{pmatrix}$, tehát a baloldali annullátor az $\begin{pmatrix} a & -2a \\ c & -2c \end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll. Másrészt $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a+2c & 2b+2d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$, tehát a jobboldali annullátor pedig az $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$ alakú mátrixokból áll.

2. $42 = 2\cdot 3\cdot 7 = -2\cdot(\sqrt{3}i)^2\cdot(2+\sqrt{3}i)(2-\sqrt{3}i)$, utóbbiak Euler-prímek, mert $2 \equiv 2 \pmod 3$ és ezek a racionális prímek prímek maradnak, a $2\pm\sqrt{3}i$ normája pedig 7, ami prím. Az is volt gyakorlaton, hogy utóbbiak nem asszociáltak. A második izomorfizmus-tétel szerint $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(42)$ maximális ideáljai megfelelnek a $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ gyűrű 42-t tartalmazó maximális ideáljainak, azaz a 42 Euler-prímosztóinak. Ezek pedig $(2)$, $(\sqrt{3}i)$, $(2+\sqrt{3}i)$ és $(2-\sqrt{3}i)$, azaz 4 db van belőlük.

3. Egy $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ csoporthomomorfizmust egyértelműen meghatároz az $f(1) \in \mathbb{Z}/(m)$ érték, hiszen 1 generálja $\mathbb{Z}/(n)$-et. Viszont $f(1)$ csak olyan elem lehet, aminek az $n$-szerese 0, hiszen $nf(1) = f(n) = f(0) = 0$. Tehát $f(1)$ egy olyan egész szám, melyre $m \mid nf(1)$, ami azzal ekvivalens, hogy $\frac{m}{(n,m)} \mid f(1)$. Minden ilyen $f(1)$ érték meghatároz egy $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ csoporthomomorfizmust. Ezt lehet látni közvetlen ellenőrzéssel is, de elegánsabban úgy is, hogy $\widetilde{f}\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/(m)$ csoporthomomorfizmust tetszőlegesen előírhatunk az $1 \in \mathbb{Z}$ helyen (hiszen $\mathbb{Z}$ szabad modulus 1 generátorral), és ez pontosan akkor faktorizálódik át $\mathbb{Z}/(n)$-en, ha $n \in \mathrm{Ker}(\widetilde{f})$. Tehát $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$-et generálja $f_0$, melyre $f_0(1) = \frac{m}{(m,n)}$. Ennek rendje pedig $(m,n)$, amiből következik a keresett izomorfizmus.

4. Nyilván $g_{|\mathrm{Ker}(\beta)} \circ f_{|\mathrm{Ker}(\alpha)} = 0$, hiszen $g \circ f = 0$. A másik irányhoz legyen $b \in \mathrm{Ker}(\beta) \cap \mathrm{Ker}(g)$. Azt kell belátni, hogy ekkor $b \in f(\mathrm{Ker}(\alpha))$. Mivel a diagramban a felső sor egzakt, ezért van olyan $a \in A$, melyre $f(a) = b$. Ekkor viszont $0 = \beta(b) = \beta(f(a)) = f'(\alpha(a))$ (a diagram kommutativitása miatt). Viszont $f'$ injektív, így $\alpha(a) = 0$, azaz $a \in \mathrm{Ker}(\alpha)$, tehát $b \in f(\mathrm{Ker}(\alpha))$.

5. A $\widetilde{\varphi}\colon \mathbb{C}[x,y] \to \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ homomorfizmust úgy definiáljuk, hogy egy $f(x,y)$ kétváltozós polinom képe $f(\frac{t+t^{-1}}{2}, \frac{-it+it^{-1}}{2}) \in \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ legyen. Ez nyilván gyűrűhomomorfizmus (elsőévben tanultuk, hogy a „behelyettesítés” az). Vegyük észre, hogy

$$\widetilde{\varphi}(x^2+y^2-1) = \frac{(t+t^{-1})^2 + (-it+it^{-1})^2}{4} - 1 = \frac{t^2+2+t^{-2}-t^2+2-t^{-2}}{4} - 1 = 0\ ,$$

azaz $x^2+y^2-1 \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\varphi})$. Tehát $\widetilde{\varphi}$ átfaktorizálódik a $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ gyűrűn, így kaptunk egy $\varphi\colon \mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1) \to \mathbb{C}[t,t^{-1}]$ gyűrűhomorfizmust. Ez szürjektív, hiszen $t = \widetilde{\varphi}(x+iy)$ és $t^{-1} = \widetilde{\varphi}(x-iy)$. Az injektivitást közvetlenül nehezebb látni (bár kijön egy általánosabb tételből, mely szerint $\mathbb{C}[x,y]$-ban nincs kettőnél hosszabb prímideálokból álló lánc, a maximális ideálok pedig a sík pontjainak felelnek meg), a legkevésbé számolós a jelenlegi tudással a következő: $\mathbb{C}[x,y] \cong \mathbb{C}[u,w]$, ahol $u = x+iy$ és $w = x-iy$. Ebben a koordinátázásban $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1) \cong \mathbb{C}[u,w]/(uw-1)$, a $\varphi$ gyűrűhomomorfizmusra pedig $\varphi(u) = t$ és $\varphi(w) = t^{-1}$. Tegyük fel, hogy valamely $f(u,w)$ kétváltozós polinomra $f(t,t^{-1}) = 0$. Ekkor $f$-ben kigyűjtve azon monomokat, melyekben $u$ és $w$ is szerepel $f(u,w) = F(u,w)(uw-1) + G(u) + H(w)$ alakba írható, ahol még azt is feltehetjük, hogy $H$ konstans tagja 0. Viszont erre alkalmazva $\varphi$-t azt kapjuk, hogy $0 = f(t,t^{-1}) = G(t) + H(t^{-1})$ teljesül $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$-ben. Viszont a két oldalon az együtthatókat összehasonlítva azt kapjuk, hogy $G = H = 0$, azaz $x^2+y^2-1 = uw-1 \mid f(u,w)$.

$\mathbb{R}$ felett nincs ilyen izomorfizmus: Tegyük fel ugyanis, hogy $\varphi\colon \mathbb{R}[x,y]/(x^2+y^2-1) \to \mathbb{R}[t,t^-1]$ egy izomorfizmus. Ekkor $\varphi(x) = \sum_{n=-K_x}^{N_x} a_n t^n$ és $\varphi(y) = \sum_{n=-K_y}^{N_y} b_n t^n$ Laurent-polinomokra $\varphi(x)^2 + \varphi(y)^2 = 1$ teljesül. Vegyük észre, hogy $\varphi(x)^2$ legmagasabb fokú tagja $a_{N_x}^2 t^{2N_x}$, melynek együtthatója pozitív. Hasonlóan $\varphi(y)$ legmagasabb fokú tagjának is pozitív az együtthatója. Emiatt sem $\varphi(x)$-ben sem $\varphi(y)$-ban nem lehet pozitív kitevőjű tag, mert a kettő közül a nagyobb fokú négyzetét semmi nem tudná kiejteni $\varphi(x)^2+\varphi(y)^2$-ben, holott az konstans. Hasonlóan negatív fokú tag sem lehet sem $\varphi(x)$-ben sem $\varphi(y)$-ban, azaz mindkettő konstans. Ez pedig ellentmond $\varphi$ szürjektivitásának.

6. Ha $r^n = 0$ valamely $n > 0$ egészre, akkor $(1+rx)(1-rx+r^2x^2+\cdots+(-1)^{n-1}r^{n-1}x^{n-1}) = 1+(-1)^n r^n x^n = 1$, azaz $(1+rx)$ invertálható. Megfordítva, ha $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ az inverz, akkor

$$\begin{aligned} 1 &= (1+rx)(a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n) = \\ &= a_0 + (a_1+a_0r)x + (a_2+a_1r)x^2 + \cdots + (a_n+a_{n-1}r)x^n + a_nrx^{n+1} \ . \end{aligned}$$

Az együtthatókat összehasonlítva $a_0 = 1$, $a_1 = -a_0 r = -r$, $\ldots$, $a_n = (-1)^n r^n$, $a_n r = 0$ adódik, azaz $(-1)r^{n+1} = 0$ így $r$ nilpotens.

7. Csak az $x = 0$, $y = 1$ a megoldás. Az Euler-egészek között szorzattá alakítva $(3x-\varepsilon)(3x-\varepsilon^2) = y^5$ alakba írható az egyenlet, ahol $\varepsilon = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$. Viszont a bal oldalon a két szorzótényező relatív prím: ha $\varpi$ egy közös Euler-prímosztójuk, akkor $\varpi \mid (3x-\varepsilon^2)-(3x-\varepsilon) = \varepsilon-\varepsilon^2 = \sqrt{3}i$. Viszont $\sqrt{3}i$ egy Euler prím, ami nem lehet közös osztó: $3x$-nek osztója, $-\varepsilon$-nak viszont nem, hiszen az egység. A számelmélet alaptétele miatt mindkét szorzótényező teljes 5. hatvány egységszerese. Viszont $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ egységei $\pm 1, \pm\varepsilon, \pm\varepsilon^2$, melyek mindegyike 5. hatvány (hiszen ezek a hatodik egységgyökök, melyek reciproka épp az 5. hatványa). Tehát alkalmas $a, b \in \mathbb{Z}$ egész számmal

$$\begin{aligned} 3x-\varepsilon = (a+b\varepsilon)^5 &= a^5 + 5a^4b\varepsilon + 10a^3b^2\varepsilon^2 + 10a^2b^3\varepsilon^3 + 5ab^4\varepsilon^4 + b^5\varepsilon^5 = \\ &= a^5 + 5a^4b\varepsilon + 10a^3b^2(-1-\varepsilon) + 10a^2b^3 + 5ab^4\varepsilon + b^5(-1-\varepsilon) = \\ &= a^5 - 10a^3b^2 + 10a^2b^3 - b^5 + (5a^4b - 10a^3b^2 + 5ab^4 - b^5)\varepsilon \ . \end{aligned}$$

A két oldalt összehasonlítva

$$-1 = 5a^4b - 10a^3b^2 + 5ab^4 - b^5 = b(5a^4 - 10a^3b + 5ab^3 - b^4) \ ,$$

ezért $b = \pm 1$. Ha $b = 1$, akkor $-1 = 5a^4 - 10a^3 + 5a - 1$, azaz $0 = a^4 - 2a^3 + a$, tehát $a = 0$ vagy 1 (racionális gyökteszt). Ezek közül $a = 0$ nem jó, hiszen ekkor $3x - \varepsilon = \varepsilon^5 = \varepsilon^2 = -1 - \varepsilon$ lenne, de $3 \nmid -1$. Viszont $a = 1$ esetén $3x - \varepsilon = (1+\varepsilon)^5 = (-\varepsilon^2)^5 = -\varepsilon$, azaz $x = 0$ és $y = 1$ adódik, ami valóban megoldás. A $b = -1$ esetben $1 = 5a^4 + 10a^3 - 5a - 1$ egyenlet adódik, aminek nincs egész megoldása (modulo 5 különböző a két oldal). Tehát az egyetlen megoldás az $(x, y) = (0, 1)$.