Algebra3 matematikus

1. ZH – megoldások

2018. október 19.

1. Az elem által generált részcsoport elemei mindig centralizálják az adott elemet, tehát azt kell belátni, hogy ha $g \in S_5$ centralizálja $(12)(345)$-öt, akkor $g = ((12)(345))^k$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$-re. Másrészt $(12)(345)$ rendje $[2,3] = 6$, ezért elég belátni, hogy $C := C_{S_5}((12)(345))$ is ekkora. S_5-ben azon elemek konjugáltak $(12)(345)$-tel, amiknek ugyanaz a ciklusszerkezete. Ilyenből $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$ van, hiszen a 2-es ciklus $\binom{5}{2}$-féle lehet, és ha azt rögzítettük, akkor a hármasciklus már csak 2-féle. Végül a pálya-stabilizátor lemma alapján $|C| = \frac{120}{20} = 6$.

2. Ez egy $\varphi(16) = 8$ elemű Abel-csoport, melynek elemei a páratlan számok (mellékosztályai) 16-ig. Másrészt $(2n+1)^4 - 1 = ((2n+1)^2 - 1)((2n+1)^2 + 1)$ mindig osztható 16-tal, hiszen $8 \mid (2n+1)^2 - 1 = 4n(n+1)$ és $2 \mid (2n+1)^2 + 1$. Tehát az elemrendek $1, 2$, ill. 4 lehetnek. Továbbá $3^2 = 9 \not\equiv 1 \pmod{16}$, ezért a 3 egy negyedrendű elem. Másrészt a 7 másodrendű: $7^2 = 49 \equiv 1 \pmod{16}$, és nincs benne a 3 által generált részcsoportban, azaz $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times = \langle 3 \rangle \times \langle 7 \rangle \cong Z_4 \times Z_2$.

3. Válasz: $n = 5$-re és 10-re. Először is a forgatások konjugáltosztályai legfeljebb két eleműek, hiszen a centralizátoruk legalább n elemű (tartalmazza az összes forgatást). Így csak tükrözés lehet az elem. Láttuk gyakorlaton, hogy ha n páratlan, akkor egy tükrözésnek D_n-ben kételemű a centralizátora, így konjugáltosztálya $\frac{2n}{2} = n$ elemű, azaz $n = 5$. Ha pedig n páros, akkor 4-elemű a centralizátor, ezért $\frac{2n}{4} = \frac{n}{2}$ elemű a konjugáltosztály, tehát $n = 10$. Mindkettő jó is.

4. Ez esetben két különböző p-Sylow részcsoport metszete 1 elemű, azaz csak az egységelemből áll, hiszen a metszet mindkettőben részcsoport, ezért rendje osztja p-t (ha pedig p lenne, akkor ugyanaz a két p-Sylow). Tehát minden p-Sylowban van pontosan $p-1$ db p-rendű elem, és ezek mind diszjunktak, így számuk a $(p-1)|Syl_p(G)|$. Végezetül minden $g \in G$ p-edrendű elem benne van egy p-Sylowban, hiszen $\langle g \rangle$ egy p rendű részcsoport (azaz jelen esetben p-Sylow), mely tartalmazza g-t.

5. Válasz: 21, illetve 3. Az világos, hogy a b, ill. d elemek által generált részcsoport normálosztó $G = \langle a, b \mid a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$-ben, illetve $H = \langle c, d \mid c^3 = d^7 = 1, cdc^{-1} = d^3 \rangle$-ban, hiszen zárt a generátorokkal való konjugálásra. Továbbá G minden eleme $b^k a^n$ alakba írható, ahol $0 \le k \le 6$ és $0 \le a \le 2$, hiszen ha egy szóban egy a megelőzne egy b-t, akkor azokat meg lehet cserélni az $ab = b^2 a$ szabály segítségével. Tehát $|G| \le 21$, ugyanígy $|H| \le 21$. Mivel a 2 rendje az $\mathbb{F}_7^\times$ multiplikatív csoportban 3, ezért van egy olyan csoporthomomorfizmus $Z_3 = \langle a \mid a^3 = 1 \rangle$-ből $\mathbb{F}_7^\times \cong \mathrm{Aut}(Z_7)$-be, mely a-t épp a 2-be küldi. Az így konstruált szemidirekt szorzat 21 elemű és teljesíti a fenti relációkat (b a Z_7 egyik generátoreleme). A H esetében viszont vegyük észre, hogy $d = c^3 d c^{-3} = c^2 d^3 c^{-2} = c(cdc^{-1})^3 c^{-1} = cd^9 c^{-1} = d^{27}$. Viszont ezt kombinálva $d^7 = 1$-gyel $d = 1$ adódik. Speciálisan H legfeljebb 3 elemű, hiszen c generálja. Így $H \cong Z_3$, hiszen a Z_3 teljesíti a fenti relációkat c generátorral és $d = 1$ választással.

6. Válasz: nincs, illetve $p = 2, 3, 5$ és $5 \mid p - 1$ esetén. Tegyük fel, hogy $|G| = 25p$. Ekkor G-ben az 5-Sylow részcsoportok száma 1 vagy p, továbbá 1 maradékot ad 5-tel osztva.

Ha $5 \nmid p-1$, akkor tehát a $H \leq G$ 5-Sylow részcsoport normálosztó. Továbbá H Abel: a centruma nemtriviális, viszont ha $Z(H)$ ötelemű lenne, akkor $H/Z(H)$ is ötelemű, azaz ciklikus. Viszont ha h tetszőleges $Z(H)$-n kívüli elem, akkor centralizátora tartalmazza $Z(H)$-t és h-t is, azaz az egész H-t. Ezzel az első kérdést meg is válaszoltuk. Speciálisan H vagy ciklikus, vagy $Z_5 \times Z_5$-tel izomorf. Első esetben $\mathrm{Aut}(H) \cong (\mathbb{Z}/25\mathbb{Z})^\times$ $\varphi(25) = 20$ rendű, a második esetben pedig $\mathrm{Aut}(H) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$ $24 \cdot 20 = 480$ rendű. Node a P p-Sylow G-ben hat a konjugálással H-n, ami megad egy $P \to \mathrm{Aut}(H)$ homomorfizmust, ami a Lagrange-tétel miatt triviális, ha $p \neq 2, 3, 5$. Ha ez a csoporthomomorfizmus triviális, az azt jelenti, hogy H és P két tetszőleges eleme felcserélhető, azaz az egész G kommutatív (hiszen H és P generálja és mindkettő kommutatív). Ha $p = 2, 3$, vagy 5, akkor Cauchy tétele miatt létezik p rendű elem $\mathrm{Aut}(Z_5 \times Z_5)$-ben, azaz létezik egy $(Z_5 \times Z_5) \rtimes Z_p$ nemkommutatív szemidirekt szorzat, mely $25p$ rendű. Végül ha $5 \mid p-1$, akkor van egy $Z_p \rtimes Z_5$ nemkommutatív szemidirekt szorzat, melynek Z_5-tel vett direkt szorzata megfelel.

7. Először vegyük észre, hogy $Z_4 \times Z_2$-ben 4 darab 4-edrendű elem van (additívan írva): $(1,0)$, $(1,1)$, $(3,0)$, és $(3,1)$. $\mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_2)$ hat ezen a négyelemű halmazon. Ráadásul ha egy $\varphi \in \mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_2)$ automorfizmus minden negyedrendű elemet fixen hagy, akkor az identikus, mert ezek a negyedrendűek generálják $Z_4 \times Z_2$-t. Így azt kaptuk, hogy $\mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_2)$ izomorf S_4 egy részcsoportjával. Másrészt belátjuk, hogy $|\mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_2)| = 8$: ebből már következik az állítás, mert S_4-nek a 2. Sylow-tétel szerint egyetlen nyolcadrendű részcsoportja van izomorfia erejéig, mégpedig a 2-Sylowja, ami D_4-gyel izomorf. A véges Abel-csoportok bizonyításából következik, hogy $Z_4 \times Z_2$-ben minden H_1 negyedrendű ciklikus részcsoport direkt összeadandó, azaz van egy olyan másodrendű H_2 részcsoport, melyre $Z_4 \times Z_2 = H_1 \times H_2$. Tehát van egy olyan automorfizmus, ami az adott Z_4-et H_1-be viszi. Továbbá Z_4-nek is van olyan automorfizmusa, ami megcseréli a két generátorelemet (azaz az 1-et és a 3-at). Speciálisan $\mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_2)$ tranzitívan hat a negyedrendű elemeken. Másrészt $(1,0)$ stabilizátora 2 elemű: nyilván ami $(1,0)$-t fixen hagyja, az $(3,0)$-t is, tehát csak a másik kettőt cserélheti meg, ilyen automorfizmus pedig tényleg van: a $(0,1)$-et $(2,1)$-be küldjük. Tehát $|\mathrm{Aut}(Z_4 \times Z_2)| = 4 \cdot 2 = 8$.