Algebra3 matematikus

2. ZH

2018. december 14.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egészrésze. Használni lehet egy saját kézzel írt A_4-es lapot. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Határozzuk meg a $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ mátrix bal és jobb annullátorát.

2. Legyen $\varepsilon \in \mathbb{C}$ egy primitív harmadik egységgyök. Bontsuk a 42-t Euler-prímek szorzatára és határozzuk meg a $\mathbb{Z}[\varepsilon]/(42)$ faktorgyűrű maximális ideáljainak a számát.

3. Mutassuk meg, hogy $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(m,n)\mathbb{Z}$.

4. Tegyük fel, hogy az alábbi kommutatív diagramban a felső sor egzakt és f' injektív:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "\gamma"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \arrow[r, "g'"] & C' \end{tikzcd} \tag{1}$$

   Bizonyítsuk be, hogy ekkor a

$$\mathrm{Ker}(\alpha) \xrightarrow{f_{|\mathrm{Ker}(\alpha)}} \mathrm{Ker}(\beta) \xrightarrow{g_{|\mathrm{Ker}(\beta)}} \mathrm{Ker}(\gamma)$$

   sorozat is egzakt.

5. Adjunk meg egy izomorfizmust a $\mathbb{C}[x,y]/(x^2+y^2-1)$ faktorgyűrű és a komplex együtthatós Laurent-polinomok $\mathbb{C}[t,t^{-1}]$ gyűrűje között. Igaz-e az analóg állítás $\mathbb{C}$ helyett $\mathbb{R}$-beli együtthatókkal?

6. Legyen r egy tetszőleges elem az R egységelemes kommutatív gyűrűben. Igazoljuk, hogy $1+rx \in R[x]$ pontosan akkor invertálható $R[x]$-ben, ha r nilpotens (azaz alkalmas pozitív egész kitevős hatványa 0).

7. Oldjuk meg az egész számok körében a $9x^2+3x+1=y^5$ egyenletet.