

# Algebra3 matematikus

1. ZH

2018. október 19.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egészrésze. Használni lehet egy saját kézzel írt  $A_4$ -es lapot. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Igazoljuk, hogy  $(12)(345) \in S_5$  centralizátora megegyezik az általa generált részcsoporttal.
2. Bontsuk ciklikusak direkt szorzatára a  $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$  csoportot, és adjuk meg a generátorokat is. (Itt  $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^\times$  a modulo 16 redukált maradékosztályok multiplikatív csoportját jelöli.)
3. Mely  $n$ -ekre van a  $D_n$  diédercsoportban 5 elemű konjugáltosztály?
4. Tegyük föl, hogy a  $G$  csoport rendjében a  $p$  prím első hatványon szerepel. Mutassuk meg, hogy a  $p$ -Sylow részcsoportok száma a  $p$ -edrendű elemek számának a  $p-1$ -ed része.
5. Hány elemű az  $\langle a, b \mid a^3 = b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$ , illetve a  $\langle c, d \mid c^3 = d^7 = 1, cdc^{-1} = d^3 \rangle$  generátorokkal és definiáló relációkkal megadott csoport?
6. Van-e 25 rendű nemkommutatív csoport? Mely  $p$  prímre van  $25p$  rendű (nemkommutatív csoport)?
7. Mutassuk meg, hogy  $\text{Aut}(Z_4 \times Z_2)$  izomorf  $D_4$ -gyel.