Algebra3 matematikus szakirány

9. gyakorlat

2018. november 30.

1. Legyen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ R-modulusoknak egy egzakt sorozata, M pedig egy tetszőleges R-modulus. Bizonyítsuk be, hogy a
$$0 \to \mathrm{Hom}_R(C, M) \xrightarrow{g^*} \mathrm{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_R(A, M)$$
sorozat is egzakt, ahol $\gamma \in \mathrm{Hom}_R(C, M)$ esetén $g^*(\gamma) = \gamma \circ g$ és $\beta \in \mathrm{Hom}_R(B, M)$ esetén $f^*(\beta) = \beta \circ f$.

2. Kígyó lemma:
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B_1 \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r] & B_2 \arrow[r] & C_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{1}$$
A fenti kommutatív diagramban a sorok egzaktak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a
$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \mathrm{Ker}(\beta) \to \mathrm{Ker}(\gamma) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Coker}(\alpha) \to \mathrm{Coker}(\beta) \to \mathrm{Coker}(\gamma) \to 0$$
sorozat is egzakt, ahol $\varphi\colon X \to Y$ (modulus)homomorfizmusra $\mathrm{Coker}(\varphi) := Y/\mathrm{Im}(\varphi)$ a φ *komag*ja. A fenti sorozatban minden leképezést az (1) diagram soraiban levő leképezések indukálnak, kivéve δ-t, melynek megkonstruálása a feladat része.

3. Adjunk példát olyan A, B R-modulusokra, amikre
   a) $\mathrm{Hom}_R(A, B) \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$;
   b) $\mathrm{Hom}_R(A, B) \neq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$, de $\mathrm{Hom}_R(A, B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$;
   c) $\mathrm{Hom}_R(A, B) \not\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, B)$.

4. Legyen $0 \to Z_2 \to Z_4 \to Z_2 \to 0$ $\mathbb{Z}$-modulusoknak rövid egzakt sorozata. Széteső-e ez a sorozat?

5. Van-e olyan $0 \to Z_2 \to Z_2 \oplus Z_2 \to Z_2 \to 0$ rövid egzakt sorozat, ami nem széteső?

6. Legyen R integritási tartomány, M egy R-modulus, $m \in M$. Azt mondjuk, hogy m *torzióelem*, ha $\mathrm{Ann}_R(m) \neq \{0\}$. Jelölje T a torzióelemek halmazát. M-et *torziómentes* modulusnak nevezzük, ha $T = \{0\}$, *torziómodulus*nak, ha $T = M$. Igazoljuk, hogy T részmodulusa M-nek, és hogy M/T torziómentes.

7. Bizonyítsuk be, hogy integritási tartomány felett minden projektív modulus torziómentes.

8. Legyen $R = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (a mod 6 maradékosztályok gyűrűje).
   (a) Van-e olyan R-modulus, ami projektív, de nem szabad?
   (b)* Van-e olyan R-modulus, ami nem projektív?

9. Igazoljuk, hogy ha A torziómentes Abel-csoport, D pedig osztható Abel-csoport, akkor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, D)$ osztható Abel-csoport.

10. Bizonyítsuk be, hogy az M R-modulus akkor és csak akkor injektív, ha minden $L \lhd_b R$ balideálhoz és minden $f\colon K \to M$ (modulus) homomorfizmushoz van olyan $g\colon R \to M$ (modulus) homomorfizmus, melyre $g_{|L} = f$.

11. Igazoljuk, hogy ha P projektív R-modulus, akkor van olyan F *szabad* R-modulus, hogy $P \oplus F$ is szabad. Van-e mindig végesen generált F is?

Nehezebb feladatok

12. Igazoljuk, hogy (kommutatív) lokális gyűrű fölött minden végesen generált projektív modulus szabad. (Az állítás igaz nem feltétlenül végesen generált projektív modulusokra is.)

13. Legyen E és E' két (R-modulus) bővítése B-nek A-val, azaz

$$0 \to A \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} B \to 0$$
$$0 \to A \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} B \to 0$$

rövid egzakt sorozatok. Ezek *Baer-összege* az a

$$0 \to A \xrightarrow{f''} Y \xrightarrow{g''} B \to 0$$

bővítés, melyre $Y := \{(x, y) \in E \oplus E' \mid g(x) = g'(y)\}/\{(f(a), -f'(a)) \in E \oplus E' \mid a \in A\}$ és $f''(a) := [(f(a), 0)] = [(0, f'(a))]$ és $g''([x, y]) = g(x) = g'(y)$. Igazoljuk, hogy a bővítések ekvivalenciaosztályai Abel-csoportot alkotnak a Baer-összegre nézve, ahol a triviális

$$0 \to A \to A \oplus B \to B \to 0$$

bővítés a nullelem. Ezt az Abel-csoportot $\mathrm{Ext}^1_R(B, A)$-val jelöljük.

14. Adott rövid egzakt

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

sorozatra és M R-modulusra konstruáljunk egy

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, A) \to \mathrm{Hom}_R(M, B) \to \mathrm{Hom}_R(M, C) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_R(M, A) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, B) \to \mathrm{Ext}^1_R(M, C)$$

(hosszú) egzakt sorozatot.