Algebra3 matematikus szakirány

8. gyakorlat

2018. november 23.

1. Igazoljuk, hogy az R kommutatív egységelemes gyűrű akkor és csak akkor *lokális* (azaz egyetlen maximális ideálja van), ha a nem invertálható elemei ideált alkotnak.

2. Az alábbi gyűrűkről igazoljuk, hogy lokálisak:

   a) $\mathbb{Z}_p$ (a p-adikus egészek);

   b) $K[[x]]$ test feletti formális hatványsorgyűrű;

   c) $R[[x]]$, ha R lokális gyűrű;

   d) $\mathbb{Z}_{(p)} := \{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b\} \subset \mathbb{Q}$;

   *e)** $C^{an}(\mathbb{C}, 0) := \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{C}, \exists r > 0\colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$;

   *f)** $C^{an}(\mathbb{Q}_p, 0) := \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mid a_n \in \mathbb{Q}_p, \exists r > 0\colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|_p r^n < \infty\}$.

3. Legyen R kommutatív egységelemes gyűrű, $P \lhd R$ prímideál és $S := R \setminus P$. Igazoljuk, hogy $R[S^{-1}]$ egy lokális gyűrű.

---

4. Legyen M egy modulus az $1 \in R$ gyűrű fölött, és $X \subseteq M$. Igazoljuk, hogy az X által generált részmodulus M-ben nem más, mint $\{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \mid r_i \in R, x_i \in X, n \geq 0\}$.

5. Igazoljuk, hogy ha $S \leq R$ egységelemes részgyűrű az R egységelemes gyűrűben, akkor R egy S-modulus az R-beli szorzással és összeadással.

6. Legyen V vektortér a K test fölött, és $\varphi\colon V \to V$ lineáris leképezés. Ekkor V modulus $K[x]$ felett az $f(x)v := f(\varphi)(v)$ szorzással. Bizonyítsuk be, hogy V részmodulusai éppen a φ-invariáns alterek V-ben.

7. Igazoljuk, hogy ferdetest fölött minden (végesen generált) modulus szabad, azaz minden (végesen generált) modulusnak van bázisa. Mutassuk meg, hogy a bázis elemszáma is egyértelmű.

8. Igazoljuk, hogy (bal-)noether gyűrű fölött végesen generált (bal-)modulus minden részmodulusa is végesen generált.