Algebra3 matematikus szakirány

7. gyakorlat

2018. november 15.

1. Bizonyítsuk be, hogy ha R kommutatív gyűrű, és $R[x]$ noether, akkor R is az.

2. Igazoljuk, hogy minden végesen generált csoportnak van maximális részcsoportja, de a racionális számok additív csoportjának nincs.

---

3. Igazoljuk, hogy az R integritási tartomány $p \neq 0$ eleme pontosan akkor prím, ha $R/(p)$ nullosztómentes. Adjunk példát (alkalmas R-ben) olyan p prímre, amikor ez a gyűrű nem test.

4. Van-e $\mathbb{Z}[x]$-ben olyan ideál, ami nem generálható 1000 elemmel?

5. Legyen $d \in \mathbb{Z}$ négyzetmentes ($d \neq 0, 1$). Határozzuk meg a $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrű invertálható elemeinek (azaz *egységeinek*) a csoportját. (Ha $d > 0$, akkor $*$-os, azaz beadható.)

6. Igazoljuk, hogy az $a)$ Gauß-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűjében $b)^*$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ $c)^*$ a $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ gyűrűben egyértelmű a prímfaktorizáció.

7. A Gauß-egészek $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ gyűrűjében mik a prímek?

---

8. A kvadratikus reciprocitás felhasználásával adjunk új bizonyítást az $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ kongruencia megoldhatóságát jellemző tételre (p pozitív prím).

9. Bizonyítsuk be, hogy ha $\pi\overline{\pi} = q \equiv 1 \pmod{3}$, ahol π Euler-prím, q pedig közönséges prím, akkor π és $\overline{\pi}$ nem asszociáltak.

10. Igazoljuk, hogy ha α Euler-egész és π Euler-prím, akkor $\pi \mid \alpha^{N(\pi)} - \alpha$.

11. Mely n-ekre oldható meg az $x^2 + 3y^2 = n$ diofantikus egyenlet? *Hány megoldás van?

12. Legyen $d \neq 0, 1$ négyzetmentes egész és $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ az $a + b\sqrt{d}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ alakú számok teste. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nek mely elemei lesznek gyökei egy egész együtthatós normált polinomnak?

---

13. Legyen K test, és $\varphi\colon K \to K$ nem azonosan 0 homomorfizmus. Mutassuk meg, hogy φ fixen hagyja K prímtestének elemeit.

14. Legyen K egy test.

    (i) Mutassuk meg, hogy ha K karakterisztikája nem 2, akkor felírható benne a másodfokú egyenlet megoldóképlete.

    (ii) Adjunk példát olyan 2 karakterisztikájú testre, és olyan másodfokú polinomra, melyre nem alkalmazható a megoldóképlet.

    (iii) Igaz-e, hogy ha K minden eleméből vonható négyzetgyök, akkor nincs K fölött irreducibilis másodfokú polinom?

15. Tegyük fel, hogy a K test karakterisztikája nem osztja az $n > 0$ egész számot (azaz $\mathrm{char} K = 0$ vagy $\mathrm{char} K = p \nmid n$). Mutassuk meg, hogy az $\varepsilon \in K$ elem akkor és csak akkor gyöke a $\Phi_n(x)$ polinomnak, ha ε rendje n K multiplikatív csoportjában. Mi a helyzet, ha $\mathrm{char} K = p = n$?

16. Mely $p \mid n$ prímekre és c egészekre igaz, hogy $p^2 \mid \Phi_n(c)$?

17. Legyenek $m \neq n$ pozitív egészek. Mikor létezik olyan c egész szám, melyre a $\Phi_m(c)$ és $\Phi_n(c)$ számok nem relatív prímek? Mennyi lehet ekkor a két szám legnagyobb közös osztója?

Nehezebb feladatok

18. Adjunk példát olyan integritási tartományra, melyben a főideálokra teljesül a maximum-feltétel, de tetszőleges ideálokra nem.

19. Igazoljuk, hogy ha R (kommutatív) noether gyűrű, akkor a formális hatványsorok $R[[x]]$ gyűrűje is noether.

20. Oldjuk meg az $x^2 + 243 = y^3$ diofantikus egyenletet.

21. Adjunk példát olyan $p \neq 0$ karakterisztikájú K testre, melyre a Frob_p Frobenius endomorfizmus nem szürjektív. Igazoljuk azt is, hogy $\mathrm{Frob}_p(K)$ résztest K-ban. Mennyi lehet $\dim_{\mathrm{Frob}_p(K)} K$?