Algebra3 matematikus szakirány

6. gyakorlat

2018. november 9.

1. Határozzuk meg az összes olyan gyűrűt, melynek additív csoportja $(\mathbb{Z}, +)$.

2. Igazoljuk az alábbiakat: Az $a \in R$ elem által *generált balideál* $(a)_b = \{na + ra \mid r \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben $(a)_b = \{ra \mid r \in R\} = Ra$ (mivel leginkább egységelemes gyűrűkkel foglalkozunk, ezért az utóbbi jelölést fogjuk használni. Az $a \in R$ elem által *generált ideál* $(a) = \{na + ra + as + \sum_i r_i a s_i \mid r, s, r_i, s_i \in R, n \in \mathbb{Z}\}$, egységelemes gyűrűben: $(a) = \{\sum_i r_i a s_i \mid r_i, s_i \in R\}$.

3. Az R gyűrű I és J ideáljai által generált ideál: $(I, J) = I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$. Az I és J komplexusszorzata által generált ideál $IJ := \{\sum_i a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$.

---

4. Határozzuk meg $\mathbb{R}[x, y]/(x^2, xy, y^2)$ ideáljait.

5. Igazoljuk, hogy $\mathbb{Q}[x]/(x^3 - 2) \cong \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$.

6. Számítsuk ki a $\mathbb{Z}/(m) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ gyűrűben az n elem annullátorát.

7. Mely $m > 0$ egészekre igaz, hogy a $\mathbb{Z}/(m)$ gyűrűben a nullosztók a nullával együtt ideált alkotnak?

8. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Számítsuk ki az $M_2(\mathbb{R})$ gyűrűben az M jobb és bal annullátorát.

9. Legyen R egységelemes gyűrű. Mutassuk meg, hogy az $M_n(R)$ teljes mátrixgyűrű ideáljai pontosan az $M_n(I)$ alakú részhalmazok, ahol I ideálja R-nek.

10. Határozzuk meg az $M_n(K)$ gyűrű összes balideálját, ha K test.

11. Igazoljuk, hogy egy K test fölötti $n \times n$-es felsőháromszög-mátrixok R gyűrűjében ideált alkotnak azok a mátrixok, amelyeknek a főátlójában végig nulla áll, és a szerinte vett faktor a K^n direkt hatvánnyal izomorf.

12. Mutassuk meg, hogy egységelemes gyűrűben minden valódi balideál része egy maximális balideálnak (amely tehát a valódi balideálok halmazában maximális).

13. Legyen I ideál az R gyűrűben. Mutassuk meg, hogy azon J ideálok között, melyekre $I \cap J = \{0\}$, van maximális.

---

14. Legyen R gyűrű. Igazoljuk, hogy az $(r, n)(s, m) := (rs + mr + ns, nm)$ szorzásra nézve az $R \times \mathbb{Z}$ Abel-csoport egységelemes gyűrűvé válik, melyben az $(r, 0)$ alakú elemek R-rel izomorf részgyűrűt alkotnak. *Ezért minden gyűrű beágyazható egységelemes gyűrűbe.*

Nehezebb feladatok

Egy R gyűrűt Neumann-regulárisnak (vagy von Neumann-regulárisnak) nevezünk, ha minden $a \in R$-hez van olyan $b \in R$, hogy $a = aba$. Erősen reguláris, ha ez a b egyértelmű.

15. Egy R egységelemes gyűrűre ekvivalens az alábbi két állítás:

    (i) R Neumann-reguláris;

(ii) R minden főbalideálja direktösszeadandó, azaz minden Ra főbalideálra létezik olyan $J \lhd_b R$ balideál, melyre $Ra \oplus J = R$.

16. Kommutatív Neumann-reguláris gyűrűben minden végesen generált ideál főideál. Mj.: Az olyan integritási tartományokat, melyekben minden végesen generált ideál főideál, Bézout-gyűrűknek nevezik.

17. Neumann-reguláris gyűrűben minden $a \in R$-hez van olyan $c \in R$ is, amire $a = aca$ és $c = cac$.

18. Neumann-reguláris gyűrű centruma is Neumann-reguláris.

19. Minden erősen reguláris gyűrű ferdetest.