Algebra3 matematikus szakirány

5. gyakorlat

2018. október 12.

1. Az alábbi, definiáló relációkkal megadott csoportoknak határozzuk meg a rendjeit. Melyek izomorfak egy korábbról már ismert csoporttal?

   (a) $\langle a \mid a^2 = 1 \rangle$.

   (b) $\langle a \mid a^3 = 1 \rangle$.

   (c) $\langle a \mid a^5 = 1, a^7 = 1 \rangle$.

   (d) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, ab = ba \rangle$.

   (e) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1, ab = ba \rangle$.

   (f) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^{-1} \rangle$.

   (g) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^7 = 1, aba^{-1} = b^2 \rangle$.

   (h) $\langle a, b \mid a^6 = 1, b^2 = a^3, bab^{-1} = a^{-1} \rangle$.

   (i) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.

   (j) $\langle a, b \mid a^2 = 1, b^2 = 1, (ab)^n = 1 \rangle$ (ahol $n \geq 3$).

   (k) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^3 = 1 \rangle$.

   (l) $\langle a, b \mid a^3 = 1, b^2 = 1, (ab)^4 = 1 \rangle$.

   (m) $\langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^3 = 1, ab = ba, cac^{-1} = b \rangle$.

2. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aut}(D_4) \cong D_4$.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha F szabad csoport, akkor bárhogy is veszünk egy $\alpha\colon G \twoheadrightarrow H$ szürjektív csoporthomomorfizmust, az F csoport minden H-ba menő φ homomorfizmusa „keresztülvezethető” az α leképezésen, azaz van olyan $\psi\colon F \to G$ homomorfizmus, hogy $\varphi = \alpha \circ \psi$.

4. Mutassuk meg, hogy ha egy szabad csoportban X és Y is szabad generátorrendszer, akkor X és Y elemszáma megegyezik.

---

5. Legyen G egy véges nilpotens csoport és $|G| = n$. Igazoljuk, hogy minden $d \mid n$-re van G-ben d-rendű normálosztó. Igaz-e a megfordítás?

6. Igazoljuk, hogy az $n \times n$-es szigorú felsőháromszög-mátrixok csoportja (tetszőleges test felett) nilpotens.

Nehezebb feladatok

7. Bizonyítsuk be, hogy a két elemmel generált szabad csoportnak van olyan részcsoportja, melynek szabad generátorrendszere végtelen.