Algebra3 matematikus szakirány

4. gyakorlat

2018. október 5.

1. Határozzuk meg az alábbi csoportok kommutátorrészcsoportját: D_n, Q, S_n, A_n, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$.

2. Igazoljuk, hogy feloldható csoport részcsoportja és faktorcsoportja is feloldható.

3. Igazoljuk, hogy az invertálható felsőháromszög-mátrixok csoportja feloldható (függetlenül az alaptesttől és a dimenziótól).

4. Igazoljuk, hogy ha $N, K \lhd G$ feloldható normálosztók G-ben, akkor NK is az.

5. Igazoljuk (Burnside kétprímes tételének felhasználása nélkül), hogy ha p prím és $\alpha \geq 0$ egész, akkor minden $4p^\alpha$ rendű csoport feloldható.

6. *a)* Igazoljuk, hogy ha $N \lhd G$ és $K \leq N$ karakterisztikus részcsoport, akkor $K \lhd G$.

   b) Melyek azok az Abel-csoportok, melyeknek nincs nemtriviális karakterisztikus részcsoportja?

   c) Igazoljuk, hogy minden G véges feloldható csoport minden minimális normálosztója (azaz olyan $N_1 \neq \{1\}$ normálosztója, mely nem tartalmaz valódi $N_1 \supsetneq K \neq \{1\}$ részcsoportot, melyre $K \lhd G$) elemi Abel p-csoport, azaz Z_p^n direkt hatvánnyal izomorf valamilyen p prímre és $n \geq 1$ egészre.

   d) Igazoljuk, hogy feloldható csoport minden maximális részcsoportja prímhatvány indexű.

7. Igazoljuk, hogy ha G egy nemkommutatív véges egyszerű csoport, akkor minden valódi részcsoportjának indexe legalább 5.

8. Igazoljuk, hogy izomorfia erejéig csak egyetlen 60-rendű egyszerű csoport van. (Segítség: keressünk a Sylow-tételek segítségével egy legfeljebb 5 indexű $H < G$ valódi részcsoportot, majd tekintsük G hatását a H szerinti mellékosztályokon. Ez megad egy $G \to S_5$ homomorfizmust.)

Nehezebb feladatok

9. Adjunk példát olyan csoportra, melyben a kommutátorok nem alkotnak részcsoportot.

10. Igazoljuk, hogy a 3-dimenziós ($\mathbb{R}$ feletti) euklideszi tér egybevágóságainak $E(3)$ csoportja nem feloldható.