Algebra3 matematikus szakirány

3. feladatsor

2018. szeptember 28.

1. Legyen $g \in G$ egy tetszőleges n rendű elem egy G csoportban, ahol $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. Írjuk fel g-t $g = g_1 \dots g_r$ alakban, ahol a g_i-k $(i = 1, \dots, r)$ páronként felcserélhetők és g_i rendje $p_i^{\alpha_i}$.
2. Legyen A egy véges Abel-csoport, és p egy prímszám. Bizonyítsuk be, hogy A felbomlik két részcsoportjának a direkt szorzatára, melyek közül az egyik egy p-csoport, a másik rendje pedig nem osztható p-vel. Egyértelmű-e a felbontás?
3. Legyen $A \cong \prod_{i=1}^{r} Z_{p^{n_i}}^{k_i}$ egy p-hatvány rendű Abel csoport, ahol $n_1 < \cdots < n_r$ és $n \geq 1$ egy tetszőleges egész szám. Az n_i-k és k_i-k segítségével adjunk formulát arra, hány p^n rendű elem van A-ban. Igazoljuk a véges Abel-csoportok alaptételében az egyértelműséget.

---

4. Legyenek $n > 1$ és $k \geq 1$ egész számok. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Aut}(\underbrace{Z_n \times \cdots \times Z_n}_{k}) \cong \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$.

   Továbbá $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^k) \cong \mathrm{GL}_k(\mathbb{Z})$.
5. Hány elemű az $\langle (12 \cdots n) \rangle \leq S_n$ részcsoport normalizátora S_n-ben?

---

6. Legyen G egy csoport, $H \leq G$ és X egy halmaz, amin G tranzitívan hat, és $x \in X$ tetszőleges. Adjunk meg egy bijekciót az X-beli H-orbitok és a $(H, \mathrm{Stab}_G(x))$ pár kettős mellékosztályai között.

---

7. Legyen P egy p-Sylow G-ben, és $N \lhd G$. Igazoljuk, hogy PN/N egy p-Sylowja G/N-nek, és $P \cap N$ egy p-Sylowja N-nek.
8. Melyik csoporttal izomorf az S_4 csoport 2-Sylow részcsoportja?
9. Igazoljuk, hogy nincs $200, 204, 260, 56, 616$ rendű egyszerű csoport.
10. Igazoljuk, hogy ha p, q, r különböző prímek, akkor nincs pqr rendű egyszerű csoport.
11. Igazoljuk, hogy ha p és q különböző prímek, akkor nincs p^2q rendű egyszerű csoport.
12. (Frattini elv) Legyen $N \lhd G$ és P egy p-Sylowja N-nek. Igazoljuk, hogy $G = NN_G(P)$, és hogy $N_G(P)$ tartalmazza G egy p-Sylow részcsoportját.
13. Tegyük fel, hogy $K \leq G$ tartalmazza G egy p-Sylowjának normalizátorát. Mutassuk meg, hogy $N_G(K) = K$ és $|G : K| \equiv 1 \pmod{p}$.

---

14. Legyenek $p \neq q$ prímek. Igazoljuk, hogy bármely két nemkommutatív pq rendű csoport izomorf.

Nehezebb feladatok

15.* Legyen $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ és B az invertálható felsőháromszög-mátrixok részcsoportja. Igazoljuk, hogy pontosan $n!$ darab kettős mellékosztálya van G-nek a (B, B) pár szerint és a permutáció mátrixok egy reprezentánsrendszert alkotnak.

16.* Igazoljuk, hogy ha $p \neq q$ prímek és $a > 0$ egész, akkor nincs $p^a q$ rendű egyszerű csoport.