Algebra3 matematikus szakirány

2. feladatsor

2018. szeptember 21.

1. Igazoljuk, hogy ha egy $H \leq G$ részcsoport indexe 2, akkor H normálosztó G-ben.

2. Legyen G csoport, $N \lhd G$ normálosztó. Bizonyítsuk be, hogy az N-et tartalmazó K részcsoport pontosan akkor normálosztó G-ben, ha a kanonikus homomorfizmusnál vett képe K/N normálosztó G/N-ben.

3. Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{Inn}(G) \cong G/Z(G)$ és ez normálosztó a teljes $\mathrm{Aut}(G)$ automorfizmus csoportban. (Az $\mathrm{Out}(G) := \mathrm{Aut}(G)/\mathrm{Inn}(G)$ csoportot külső automorfizmus csoportnak hívjuk.)

4. Bizonyítsuk be, hogy $Z(S_n) = 1$, ha $n \geq 3$. Mi $Z(D_n)$? És $Z(Q)$?

5. Határozzuk meg az alábbi csoportok összes elemének centralizátorát és konjugáltosztályát: D_n, Q, S_4, S_5, A_4, A_5, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$. (Egy elem centralizátora alatt az összes vele felcserélhető elem részcsoportját értjük.)

6. Bizonyítsuk be, hogy az $(12\cdots n) \in S_n$ elem centralizátora pontosan az általa generált részcsoport.

7. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges csoportelem centralizátorának az indexe megegyezik a konjugáltosztályának elemszámával.

8. Legyen $G := \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, és $T \leq G$ a diagonális invertálható mátrixok csoportja. Bizonyítsuk be, hogy $C_G(T) = T$. Melyik ismert csoporttal izomorf $N_G(T)/T$?

9. Keressünk olyan G csoportot, $H \leq G$ részcsoportot, és $g \in G$ elemet, melyre $g^{-1}Hg \lneq H$.

10. Mutassuk meg, hogy egy csoportban az n rendű elemek által generált részcsoport mindig normálosztó, sőt karakterisztikus részcsoport (azaz minden automorfizmusnál önmagába megy).

11. Legyen A Abel-csoport, $n > 0$ egész szám, és írjuk az A-beli műveletet additívan. Bizonyítsuk be, hogy $nA := \{na \mid a \in A\}$, és $A[n] := \{a \in A \mid na = 0\}$ karakterisztikus részcsoportok.

12. Hányféleképpen bontható fel a $Z_p \times Z_p$ csoport két valódi részcsoportjának direkt szorzatára?

13. Hány p^2 rendű elem van $Z_{p^2} \times Z_p$-ben? És hány p^2 rendű részcsoport?

Nehezebb feladatok

14. Mely véges csoportoknak létezik olyan másodrendű automorfizmusa, amelynek egyetlen fixpontja az egységelem? (Az ilyen automorfizmust fixpontmentesnek hívják.)

15. Legyen G_1 és G_2 két csoport. Bizonyítsuk be, hogy $G := G_1 \times G_2$ minden H részcsoportjához van olyan $N_1 \lhd H_1 \leq G_1$, $N_2 \lhd H_2 \leq G_2$ és egy $\iota\colon H_1/N_1 \to H_2/N_2$ izomorfizmus, melyre
$$H = \{(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2 \leq G_1 \times G_2 \mid \iota(h_1N_1) = h_2N_2\}.$$

16. Legyen $U \leq G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ azon felsőháromszög-mátrixok csoportja, melyekben a főátló elemei 1-esek. Mi $N_G(U)$?