Algebra3 matematikus szakirány

1. feladatsor

2018. szeptember 14.

1. Igazoljuk, hogy ha egy csoportban minden elem rendje legfeljebb 2, akkor a csoport kommutatív.
2. Legyen g egy n-edrendű elem a G csoportban. Mennyi g^k rendje?
3. Mely n egészekre és K testekre lesz a $\mathrm{GL}_n(K)$ csoport kommutatív?
4. Mennyi $|\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)|$? És $|\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_p)|$?
5. Milyen elemrendek fordulnak elő a $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$ csoportban?
6. Mik lehetnek $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$-ben egy p-edrendű elem sajátértékei?
7. Legyen G egy csoport, H_1 és H_2 részcsoportok G-ben. Adjunk szükséges és elégséges feltételt arra, hogy $H_1 \cup H_2$ is részcsoport legyen G-ben.
8. Van-e A_4-ben 6-odrendű részcsoport?
9. Tekintsük a D_4 diédercsoportot, mint a sík egybevágósági transzformációinak részcsoportját. Adjuk meg a sík pontjainak orbitját és stabilizátorát.
10. Keressük meg azt a részcsoportot S_4-ben, amelyet a Cayley-tétel bizonyítása a Klein-csoporthoz, illetve a Z_4 csoporthoz rendel.
11. Mennyi $\mathrm{Aut}(Q)$ rendje? *Melyik csoporttal izomorf?
12. (a) Igazoljuk, hogy permutációcsoportban a fixpontok átlagos száma megegyezik a pályák számával.
    (b) Legyen X legalább kételemű véges halmaz. Igazoljuk, hogy S_X minden tranzitív részcsoportjában van fixpontmentes elem. Elhagyható-e a tranzitivitás feltétele?
    (c) Hány különböző nyakláncot tudunk készíteni 4 piros és 3 kék gyöngyből?
13. Adjunk meg $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$-ben egy Q-val izomorf részcsoportot.
14. Határozzuk meg a sík egybevágósági transzformációiból álló véges csoportokat.

Nehezebb feladatok

15.* Igazoljuk, hogy tetszőleges test multiplikatív csoportjának tetszőleges véges részcsoportja ciklikus.

16.* Bizonyítsuk be, hogy ha $2 \leq n < p$ és p prím, akkor $\mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p)$-ben nincs p^2 rendű elem.

17.* Bizonyítsuk be, hogy ha G egy végtelen Abel csoport, melyben minden valódi részcsoport véges, akkor $G \cong Z_{p^\infty}$ valamilyen p prímszámra, ahol Z_{p^∞} a p-hatványrendű komplex egységgyökök csoportja.

18.* Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ esetén A_n minden eleme (azaz minden páros permutáció) előáll hármasciklusok szorzataként.