Algebra2 Intenzív verzió

2. ZH – megoldások

2018. május 10.

1. A kvadratikus alak mátrixa $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$. Ennek karakterisztikus polinomja: $(x-5)(x-2)-4 = x^2-7x+6 = (x-6)(x-1)$, tehát a két sajátérték 6 és 1. Az 1-hez tartozó egységnyi hosszú (egyik) sajátvektor: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$, a 6-hoz tartozó pedig $\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$ (ez a két tengely), tehát az áttérési mátrix $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5} \\ \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$. Utóbbi inverze $S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \\ \frac{-2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$. Tehát az eredeti egyenlet $\left(\frac{x+2y}{\sqrt5}\right)^2 + 6\left(\frac{-2x+y}{\sqrt5}\right)^2 = 6$ alakot ölt. Ez egy ellipszis, melynek a tengelyeken levő pontjai $\pm\begin{pmatrix} \frac{\sqrt6}{\sqrt5} \\ \frac{2\sqrt6}{\sqrt5} \end{pmatrix}$, illetve $\pm\begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} \end{pmatrix}$.

2. Ez egy kétdimenziós altér, ezért kételemű lesz a bázis. A módszer a következő: veszünk egy tetszőleges $\neq 0$ vektort ebben a síkban, lenormáljuk, hogy egységhosszú legyen, majd veszünk egy másik vektort a síkban, ami ezzel nem párhuzamos, és a Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással merőlegessé tesszük az eredeti vektorra. Pl. ha a $b_1 = (1,-1,0)^T$ vektorból indulunk ki, akkor ennek hossza $\sqrt2$, tehát az első bázisvektor $e_1 = (\frac{1}{\sqrt2}, -\frac{1}{\sqrt2}, 0)^T$ lesz. Ha második vektorként a $b_2 = (2,0,1)^T$ vektort vesszük, akkor $(e_1, b_2) = \sqrt2$, ezért $b_2 - \sqrt2 e_1 = (1,1,1)$ vektor már merőleges lesz e_1-re. Ezt lenormálva a második bázisvektor $e_2 = (\frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3}, \frac{1}{\sqrt3})^T$. Természetesen másik bázisvektorokból kiindulva más ONB-t kapunk.

3. Mivel $(AB)^* = B^*A^* = BA$ (hiszen $A^* = A$ és $B^* = B$), ezért ez pontosan akkor egyenlő AB-vel, ha $AB = BA$, azaz felcserélhetők.

4. A rang nem más, mint a képtér dimenziója. Viszont a dimenziótétel miatt elég belátni, hogy A^*A és A magtere ugyanakkora dimenziós. Viszont A^*A magtere megegyezik A magterével, hiszen

$$Av = 0 \Rightarrow A^*Av = 0 \Rightarrow (v, A^*Av) = 0 \Rightarrow (Av, Av) = 0 \Rightarrow Av = 0\ ,$$

ezért minden közbülső állítás ekvivalens egymással.

5. Írjuk először x-et $x = \alpha + x_0$ alakban, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ és x_0 tisztán képzetes kvaternió. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 = zx + xz = 2\alpha z + (zx_0 + x_0 z) = 2\alpha z + (zx_0 + (-x_0)(-z)) = \\ = 2\alpha z + (zx_0 + \overline{x_0}\cdot\overline{z}) = 2\alpha z + (zx_0 + \overline{(zx_0)})\ . \end{aligned}$$

Mivel αz tisztán képzetes, $zx_0 + \overline{(zx_0)}$ pedig valós, ezért mindkettő 0. Speciálisan $\alpha = 0$, ezért x tisztán képzetes. Másrészt tisztán képzetes x és z kvaterniókra az $xz + zx = 0$

feltétel pont azt jelenti, hogy x és z merőlegesek a Frobenius-tétel bizonyításában N-en definiált skalárszorzásra nézve. Tehát az x megoldások halmaza a $\langle z\rangle$ altér ortogonális kiegészítő tere a tisztán képzetes kvaterniók 3-dimenziós terében, azaz kétdimenziós. (Természetesen $z = bi+cj+dk$, $x = \alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$ alakban felírva az egyenletrendszert megoldva is megkaphatjuk a megoldást.)

6. Használjuk az előadáson tanult tételt, mely szerint minden ortogonális transzformáció alkalmas ONB-ben egy olyan blokkdiagonális mátrix, melynek főátlójában ± 1-es 1×1-es és $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ alakú 2×2-es blokkok vannak. Ha k darab 1×1-es és ℓ darab 2×2-es blokk van, akkor $n = k+2\ell$. A főátlóban levő -1-esek az adott bázisvektorra merőleges hipersíkra való tükrözésnek (ilyenből $\leq k$ darab van), a $\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ blokkok pedig α szögű forgatásnak felelnek meg. Utóbbiak felírhatók két tükrözés egymásutánjaként, tehát az eredeti transzformáció legfeljebb $k + 2\ell = n$ tükrözés szorzata összesen.

7. Egyik irány: Ha φ normális, akkor volt előadáson, hogy φ minden sajátvektora φ^*-nak is sajátvektora. Viszont ha φ normális, akkor persze φ^* is az, ezért φ^* minden sajátvektora $(\varphi^*)^* = \varphi$-nek is sajátvektora, azaz a sajátvektorok megegyeznek.

   Másik irány: Az órán tanult tételhez hasonlóan belátjuk, hogy ha φ és φ^* sajátvektorai megegyeznek, akkor φ alkalmas ONB-ben diagonalizálható (speciálisan φ normális). Mivel $\mathbb{C}$ algebrailag zárt, van φ-nek egy v sajátvektora $\lambda \in \mathbb{C}$ sajátértékkel. Az előadáson volt, hogy ekkor $\langle v\rangle^\perp$ egy φ^*-invariáns altér. Ugyanakkor a feltétel szerint v sajátvektora φ^*-nak is, hiszen megegyeznek a sajátvektoraik. Viszont ekkor $\langle v\rangle^\perp$ egy $(\varphi^*)^* = \varphi$-invariáns altér is, ezért $\dim V$ szerinti indukcióval találhatunk $\langle v\rangle^\perp$-ben egy ONB-t, ami φ (és így φ^*) sajátvektoraiból áll. Ezt $\frac{1}{\|v\|}v$-vel kiegészítve kapunk egy ortonormált sajátbázisát φ-nek.