Algebra2 Intenzív verzió

1. ZH

2018. április 10.

A maximális pontszám minden feladatra 10 pont. A ZH jegye a pontszám tizedének egészrésze. Használni egy $A4$-es lapot lehet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 118 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját és Jordan-féle normálalakját. Határozzuk meg továbbá a sajátaltereit.

2. Írjuk fel az $\mathbb{R}$ fölötti $x^2 - 6xy + 10y^2 + 2yz - 2z^2$ (háromváltozós) kvadratikus alak mátrixát, majd alkalmas bázisban alakítsuk (előjeles) négyzetösszeggé.

3. Van-e olyan

   a) 19×19-es;

   b) 29×29-es;

   c) 37×37-es

   racionális együtthatós mátrix, aminek 29-edik hatványa az egységmátrix kétszerese? Ha igen, akkor adjunk is meg ilyen mátrixot.

4. Legyenek φ és ψ lineáris transzformációk egy 59-dimenziós vektortéren, melyekre $\mathrm{Im}(\varphi \circ \psi) \supseteq \mathrm{Ker}(\psi \circ \varphi)$. Igazoljuk, hogy $\varphi \circ \varphi \neq 0$. Igaz marad-e az állítás, ha a tér dimenziója 60?

5. Legyen A egy négyzetes mátrix a K test fölött, melynek minimálpolinomja $m_A(x) = f(x)g(x)$ szorzatra bomlik, ahol $f, g \in K[x]$ egymáshoz relatív prímek. Igazoljuk, hogy $\mathrm{Im}(f(A)) = \mathrm{Ker}(g(A))$.

6. Igaz-e minden $\beta\colon V \times V \to K$ szimmetrikus bilineáris függvényre, hogy

   a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$;

   b) $U^\perp + W^\perp = (U \cap W)^\perp$

   minden $U, W \leq V$ altérre? És ha β-ról feltesszük, hogy nemelfajuló? (Itt egy $X \leq V$ altérre $X^\perp = \{v \in V \mid \beta(x, v) = 0 \forall x \in X\}$.)

7. Mely n-ekre létezik olyan $n \times n$-es *racionális* együtthatós mátrix, melynek a $\{0\}$-n és $\mathbb{Q}^n$-en kívül pontosan egy invariáns altere van?