

# Algebra2 Intenzív verzió

## 9. gyakorlat

2018. április 24-25.

1. Legyen  $z = a + bi + cj + dk = \alpha + \beta j$ , ahol  $\alpha = a + bi$ ,  $\beta = c + di$ . Igazoljuk, hogy a

$$\varphi(z) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

leképezés egy injektív gyűrűhomomorfizmus a  $\mathbb{H}$ -ból a  $\mathbb{C}^{2 \times 2}$  gyűrűbe, és így a kvaterniók gyűrűt alkotnak a megadott műveletekre.

2. Határozzuk meg az  $i + j$  és  $i + j + k$  kvaterniók négyzetét, inverzét és minimálpolinomját.
3. Igazoljuk, hogy az 1. Feladatbeli homomorfizmusnál  $N(z) = \det(\varphi(z))$ . Speciálisan ha  $z, w \in \mathbb{H}$  kvaterniók, akkor  $N(zw) = N(z)N(w)$ , azaz a norma multiplikatív.
4. Mik az  $x^2 - 1$ , ill.  $x^2 + 1$  polinomok gyökei  $\mathbb{H}$ -ban?
5. Igazoljuk, hogy az  $a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$  és az  $a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$  nem valós kvaterniók pontosan akkor generálják  $\mathbb{H}$ -nak ugyanazt a ( $\mathbb{C}$ -vel izomorf) részalgebráját, ha a  $(b_1, c_1, d_1)$  és a  $(b_2, c_2, d_2)$   $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok párhuzamosak.
6. Igazoljuk, hogy minden nem valós kvaterniónak pontosan két négyzetgyöke van  $\mathbb{H}$ -ban.
7. Oldjuk meg  $\mathbb{H}$ -ban az  $x^n = 1$  egyenletet.
8. Mutassuk meg, hogy a Frobenius tétel mindegyik feltétele szükséges, vagyis adjunk példát olyan  $\mathbb{R}$  feletti algebrára, amely nem a tételben felsoroltak egyike, de (i) nullosztómentes, csak nem végesdimenziós; (ii) végesdimenziós, de nem nullosztómentes.
9. Határozzuk meg a  $\mathbb{C}$  fölötti végesdimenziós, nullosztómentes algebrákat.
10. Adjunk meg  $\mathbb{Q}$  felett végtelen sok páronként nemizomorf végesdimenziós nullosztómentes algebrát. (Kommutatív is van, sőt, kétdimenziós is.)
11. Legyen  $D$  egy ferdetest. Igazoljuk, hogy egy  $A \in D^{n \times n}$  mátrix pontosan akkor felcserélhető az összes  $D^{n \times n}$ -beli mátrixszal, ha  $A = aI$  skalármátrix egy olyan  $a \in D$ -re, mely minden  $D$ -belivel felcserélhető.

---

*Nehezebb feladatok*

12. Mely kvaterniók gyökei egy normált, egész együttthatós polinomnak?
- 13\* Adjunk meg végtelen sok páronként nemizomorf  $\mathbb{Q}$  felett négydimenziós nemkommutatív ferdetestet.