Algebra2 Intenzív verzió

4. gyakorlat

2018. március 6-7.

1. Határozzuk meg $\sqrt[3]{2}$ minimálpolinomját $\mathbb{Q}$ fölött.

2. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, melyeknek minimálpolinomja elsőfokú? Melyek azok, amelyeknek a minimálpolinomja és a karakterisztikus polinomja különböző?

3. a) Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges K test feletti polinom előáll (konstans szorzó erejéig) egy alkalmas K feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformáció karakterisztikus polionomjaként.
   b) Igaz-e az állítás karakterisztikus polinom helyett minimálpolinommal?
   c) Igaz-e, hogy ha f egy k-adfokú polinom, és $k \leq n$, akkor f (konstans szorzó erejéig) egy alkalmas $n \times n$-es mátrix minimálpolinomja? Függ-e a válasz az alaptesttől?

4. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2\times 2}$-ben az $X^4 = 2X$ egyenletet.

5. Legyen V véges dimenziós, $A \in \mathrm{End}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Jelölje továbbá $m_{A,v}$ azt a minimális fokú normált polinomot, melyre $m_{A,v}(A)v = 0$. Igazoljuk a következőket:
   a) A minimálpolinomja m_A az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V-t.
   b) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v-t tartalmazó legszűkebb A-invariáns altér.
   c) $\dim(W) = \deg(m_{A,v})$.
   d) Ha m_A-nak van k-adfokú irreducibilis osztója, akkor A-nak van k-dimenziós invariáns altere.
   e) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

   Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.

6. Legyen A egy komplex elemű mátrix. Igaz-e, hogy ha *a)* $A^{2011} = I$; *b)* $A^{2011} = 0$, akkor A diagonalizálható?

7. Igazoljuk, hogy a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ semmilyen test felett sem diagonalizálható.

8. Igazoljuk, hogy ha egy $A \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mátrix összes sajátértéke racionális és A diagonalizálható $\mathbb{C}$ felett, akkor diagonalizálható $\mathbb{Q}$ felett is.

9. Az alábbiakban új bizonyítást adunk a Cayley–Hamilton tételre (feltéve az algebra alaptételét, amit nem bizonyítottunk – valójában csak annyi kell, hogy minden polinomnak van gyöke egy alkalmas (esetleg bővebb) test fölött, ami Algebra4-es anyag).

   a) Először igazoljuk a tételt diagonális mátrixokra, majd diagonalizálhatóakra.

   b) Ha az $Y = ((y_{ij}))_{1\le i,j\le n}$ mátrix elemeit tekintjük változóknak, akkor Y karakterisztikus polinomja egy $k_Y(x) = (-1)^n x^n + \cdots + f_k((y_{ij}))x^k + \cdots + f_0((y_{ij}))$ polinom, melyben x^k együtthatója egy $n-k$-adfokú homogén, egészegyütthatós $f_k((y_{ij}))$ polinomja az y_{ij} változóknak ($1 \le i, j \le n$).

   c) A Cayley–Hamilton tétel állítása $n\times n$-es mátrixokra: $0 = k_Y(Y) = \sum_{k=0}^{n} f_k((y_{ij}))Y^k$. Ha a $k_Y(Y)$ mátrix u-adik sorának v-edik elemét paraméteresen kiszámoljuk, az egy $h_{uv}((y_{ij}))$ homogén n-edfokú n^2-változós polinom, melynek eltűnése az állítás. Továbbá az előző rész szerint konkrét a_{ij} számokat behelyettesítve $h_{uv}((a_{ij})) = 0$ minden $1 \le u, v \le n$-re, ha az $A = ((a_{ij}))$ mátrix diagonalizálható.

   d) A $k_Y(x)$ (x-ben egyváltozós) polinom diszkriminánsa szintén egy $D((y_{ij}))$ egész együtthatós polinomja az y_{ij} változóknak, mely ha nem 0 egy adott A mátrixra, akkor A diagonalizálható. Speciálisan $D((a_{ij}))h_{uv}((a_{ij})) = 0$ minden $A \in \mathbb{C}$ mátrixra és $1 \le u, v \le n$-re.

   e) Mivel a $D((y_{ij}))h_{uv}((y_{ij})) \in \mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn}]$ polinom minden $\mathbb{C}$ feletti behelyettesítésre eltűnik, ezért ez az azonosan 0 polinom (azaz formálisan minden együttható 0). De a $\mathbb{Z}[y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{nn}]$ polinomgyűrű 0-osztómentes, ezért $h_{uv}((y_{ij})) = 0$, hiszen $D((y_{ij})) \ne 0$. Tehát ez egy egészegyütthatós azonosság, ami így *minden* testben teljesül, azaz $k_A(A) = 0$ tetszőleges test feletti tetszőleges A mátrixra.

10. Harmadik bizonyítás a Cayley–Hamilton tételre az egyszerűség kedvéért csak $\mathbb{C}$ feletti mátrixokra.

    a) Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ és λ egy sajátértéke A-nak, $V_\lambda \le \mathbb{C}^n =: V$ pedig a hozzá tartozó sajátaltér és $k := \dim V_\lambda$ a geometriai multiplicitás. Ekkor az A mátrix V_λ invariáns altérre való megszorításának $(\lambda - x)^k$ a karakterisztikus polinomja, és tetszőleges $v \in V_\lambda$-ra $(\lambda I - A)v = 0$, ezért $(\lambda I - A)^k v = 0$.

    b) Indukcióval a Cayley–Hamilton tétel teljesül a V/V_λ vektortéren az A által indukált $\widetilde{A}$ lineáris leképezésre: $k_{\widetilde{A}}(\widetilde{A}) = 0$, azaz $k_{\widetilde{A}}(A)v \in V_\lambda$ minden $v \in V$-re.

    c) $k_A(x) = (\lambda - x)^k k_{\widetilde{A}}(x)$ (3/9. feladat), ezért tetszőleges $v \in V$ vektorra $k_A(A)v = (\lambda I - A)^k(k_{\widetilde{A}}(A)v) = 0$, azaz $k_A(A)$ az azonosan 0 lineáris leképezés.

Nehezebb feladatok

11. Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n\times n}$-beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{C}$ felett.

12. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{C}^{k\times k}$ és tekintsük az $n \times k$-as mátrixok $\mathbb{C}^{n\times k}$ vektorterén azt a lineáris transzformációt, ami egy $M \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixhoz $AM - MB \in \mathbb{C}^{n\times k}$ mátrixot rendeli. Igazoljuk, hogy ez a lineáris transzformáció pontosan akkor bijektív, ha A-nak és B-nek nincs közös sajátértéke.