# Algebra2 Intenzív verzió

3. gyakorlat

2018. február 27-28.

1. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban $M$, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

2. A $\varphi$ transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva $\varphi$ mátrixát az $(1,1)$, $(1,2)$ bázisban, és a $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1,1)/\sqrt{2}$ bázisban is.

3. Igazoljuk, hogy egy $A \in K^{n \times k}$ mátrix, mint $A\colon K^k \to K^n$ lineáris leképezés rangja nem más, mint a képterének a dimenziója. Igazoljuk, hogy $\mathrm{rk}(BA) \leq \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$, ha a $BA$ mátrixszorzás értelmes.

4. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, karakterisztikus polinomját és minimálpolinomját.

   *a*) Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

   Melyek diagonalizálhatóak? Számítsuk ki az utolsó két mátrix $n$-edik hatványát.

   *b*) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli $\alpha$ szögű forgatás.

   *c*) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

5. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

   a) Ha $\lambda$ sajátértéke $A$-nak, akkor $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek.

   b) Ha $\lambda^2$ sajátértéke $A^2$-nek, akkor $\lambda$ sajátértéke $A$-nak.

   c) Ha 0 sajátértéke $A^2$-nek, akkor 0 sajátértéke $A$-nak.

6. Tegyük fel, hogy $A$ egy olyan lineáris transzformáció egy $n$-dimenziós téren, melynek $n$ különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy $A$-nak pontosan $2^n$ invariáns altere van.

7. Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ $B$-invariáns altér. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

8. Legyen $V$ egy $\mathbb{C}$ feletti $n$-dimenziós vektortér, $A$ pedig egy lineáris transzformáció $V$-n. Bizonyítsuk be, hogy $V$-nek minden $0 \leq k \leq n$-re van $k$-dimenziós $A$-invariáns altere.

9. Legyen $A$ egy lineáris transzformáció egy $V$ végesdimenziós vektortéren, és $U$ egy invariáns altér. Jelöljük $A_U$-val $A$ $U$-ra való megszorítását, $A_{V/U}$ pedig a faktortéren indukált lineáris transzformációt. Bizonyítsuk be, hogy a karakterisztikus polinomokra fennáll a $k_A(x) = k_{A_U}(x)k_{A_{V/U}}(x)$ összefüggés.

10. Legyen $\varphi$ egybevágósági transzformáció a térben, mely a $P$ pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet $\varphi$ vagy helyben hagy, vagy $P$-re tükröz.

---

*Nehezebb feladatok*

11. Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának 0 a nyoma. Az első hány hatványra kell csak feltenni?

12. Bizonyítsuk be, hogy ha $M$ egy komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén $M^n$ akkor és csak akkor tart nullához, ha $M$ minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.

13. Legyen $V$ a valós függvények vektortere a pontonkénti műveletekre, és $r \in \mathbb{R}$ esetén $D_r \in \mathrm{Hom}(V, V)$ az a transzformáció, melyre $D_r(f)(x) = f(x + r) - f(x)$. Igazoljuk, hogy $D_r D_s = D_s D_r$. Mutassuk meg továbbá, hogy egy $n$-edfokú polinom nem állítható elő (legfeljebb) $n$ darab periodikus függvény összegeként.