Algebra2 Intenzív verzió

2. gyakorlat

2018. február 20-21.

1. Egy tízdimenziós térben kiválasztunk három kilencdimenziós alteret. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.

2. Az alábbi $\varphi\colon V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott adjuk meg a leképezés mátrixát a szokásos, illetve a megadott bázis(pár)ban. Mi lesz a képtér, ill. a magtér?

   (a) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, φ egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés. A mátrixot csak az origó körüli α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1, 1)$, $b_2 = (-1, 1)$ bázisban.

   (b) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, φ az $1 + i$ számmal való szorzás.

   (c) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, φ az $1 + i$ számmal való szorzás.

   (d) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az R felett, $\varphi(v)$ a v komponenseinek az összege.

   (e) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, φ a transzponálás (azaz a főátlóra való tükrözés).

   (f) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(f) = f(i)$.

   (g) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $\varphi(f) = f'$ (derivált).

3. Legyen f lineáris leképezés V_1-ből V_2-be. Melyek igazak a következők közül?

   (a) Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k \in V_1$ független, akkor $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)$ is független.

   (b) Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ generátorrendszere V_1-nek, akkor $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)$ generátorrendszere V_2-nek.

   (c) Ha $a_1, a_2, \ldots, a_k$ generátorrendszere V_1-nek, akkor $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)$ generátorrendszere $\mathrm{Im}(f)$-nek.

   (d) Ha $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)$ független, akkor $a_1, a_2, \ldots, a_k$ is független.

   (e) Ha $f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_k)$ generátorrendszere V_2-nek, akkor $a_1, a_2, \ldots, a_k$ generátorrendszere V_1-nek.

4. Legyen $U, W \leq V$ alterek egy vektortérben. Tekintsük a következő leképezést: $\varphi\colon U \oplus W \to V$, $\varphi(u, w) := u + w \in V$. (Itt $U \oplus W$ a *külső* direkt összeg.) Igazoljuk, hogy ez egy lineáris leképezés. Mi a magja és a képe? A lineáris leképezésekre vonatkozó dimenziótétel segítségével adjunk új bizonyítást az alterek összegének dimenziójára vonatkozó képletre.

5. Legyen φ a térben a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és ψ az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1,2,3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $\varphi \circ \psi = \psi \circ \varphi$?

6. Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1,1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér (a sík lineáris transzoformációinak vektorterében), és határozzuk meg a dimenzióját.

7. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Bizonyítsuk be, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, illetve a képtere.

8. Mely V vektorterekben van olyan $\varphi \in \mathrm{End}(V)$, melyre $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(\varphi)$?

9. Legyen V véges dimenziós vektortér, $\varphi\colon V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(\varphi^2) = \mathrm{Im}(\varphi)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(\varphi^2) = \mathrm{Ker}(\varphi)$? Igaz-e a megfordítás?

10. Mutassuk meg, hogy ha φ idempotens lineáris transzformáció a V vektortéren, azaz $\varphi^2 = \varphi$, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi) = V$. (Az ilyen lineáris transzformációkat projekcióknak is nevezik.) Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

11. Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $\varphi \in \mathrm{Hom}(V,V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(\varphi^k) \oplus \mathrm{Ker}(\varphi^k)$.

12. Egy φ lineáris transzformáció nilpotens, ha van olyan n pozitív egész, hogy $\varphi^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy ha az φ és ψ nilpotens, lineáris transzformációk felcserélhetők (azaz $\varphi\psi = \psi\varphi$), akkor $\varphi + \psi$ is nilpotens. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

Nehezebb feladatok

13. Legyen M nilpotens $n \times n$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $M^n = 0$.

14. Legyenek U és W alterek a V vektortérben. Adjunk meg egy $U/(U \cap W) \to (U+W)/W$ izomorfizmust. (I. izomorfizmus tétel.)

15. Bizonyítsuk be, hogy ha $W \leq U \leq V$ alterek a K feletti V vektortérben, akkor U/W altér V/W-ben, és $(V/W)/(U/W) \cong V/U$. (II. izomorfizmus tétel.)

16. Legyenek V_i $(i \in I)$ és W vektorterek a K test fölött. Bizonyítsuk be, hogy

    a) $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} V_i, W) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(V_i, W)$;

    b) $\mathrm{Hom}(W, \prod_{i\in I} V_i) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}(W, V_i)$.

17. Igaz-e végtelen dimenziós vektorterekre, hogy $V^{**} \cong V$?