

Algebra2 Intenzív verzió

1. gyakorlat

2018. február 13-14.

1. Vektortér-e a W halmaz az alábbi esetekben? A műveletek mindig a szokásosak.
 - a) W a páros fokú $K[x]$ -beli polinomok és a zéruspolinom a K test felett.
 - b) W a legfeljebb tizedfokú $K[x]$ -beli polinomok és a zéruspolinom a K test felett.
 - c) W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$ -beli polinomok \mathbb{Q} felett, melyekre $f(0) = 1$.
 - d) W azok az $f \in \mathbb{Q}[x]$ -beli polinomok \mathbb{Q} felett, melyekre $f(\sqrt[3]{2}) = 0$.
 - e) W azok a $\mathbb{Q}[x]$ -beli polinomok \mathbb{Q} felett, melyek egész helyen egész értéket vesznek fel.
 - f) $W = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) = 0\}$ az \mathbb{R} illetve a \mathbb{C} felett.
 - g) $W = \{a + b\sqrt[3]{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ a \mathbb{Q} felett.
 - h) W az első és harmadik síknegyed uniója \mathbb{R} felett.
 - i) $W = \mathbb{R}$ az \mathbb{F}_2 test fölött, ahol $0v = 0$ és $1v = v$.
2. Legyen $V = \mathbb{C}$, $K = \mathbb{R}$ a szokásos műveletekkel, és definiáljuk a vektortérműveleteket az $u \oplus v = u + v - 1$ és $\lambda \odot v = \lambda v - \lambda + 1$ képletekkel. Ellenőrizzük, hogy vektorteret kaptunk. Hogyan lehetne ezt úgy megtenni, hogy nem számoljuk végig a nyolc axiómát?
3. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c \rangle$, $b \notin \langle a, c \rangle$ és $c \in \langle a, b \rangle$, akkor mi a c ?
4. Legyen V vektortér a K test felett. Mikor lesz két altér uniója is altér?
5. Legyen V vektortér a K test felett.
 - (a) Mi az üres halmaz által generált altér?
 - (b) Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.
6. Mutassuk meg, hogy ha egy \mathbb{R} feletti vektortérnek véges sok altere van, akkor az alterek száma 1 vagy 2. Milyen K testek felett igaz még ez az állítás?

7. Igazoljuk az alábbiakat.
 - (a) Ha egy vektorrendszerben szerepel a nullvektor, akkor az nem lehet független.
 - (b) $\{v\}$ akkor és csak akkor független, ha $v \neq 0$.
 - (c) $K[x]$ -ben, mint K feletti vektortérben páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

8. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különbözők. Igazoljuk, hogy $(x-a)(x-b), (x-b)(x-c), (x-a)(x-c)$ lineárisan függetlenek.
9. Ha v_1, \dots, v_n lineárisan függetlenek, akkor $v_1 + v_2, v_2 + v_3, \dots, v_{n-1} + v_n, v_n + v_1$ is függetlenek-e? Független-e a válasz az alaptesttől? És n értéketől?
10. Egy \mathbb{R} fölötti vektortérben egy 100 elemű vektorrendszer elemei közül bármely 21 darab összefüggő. Legalább hány olyan vektor van a rendszerben, ami kifejezhető a többiek lineáris kombinációjaként?
11. Az alábbi állítások közül melyek igazak egy n -dimenziós V vektortérben?
 - (a) Ha F független is és generátorrendszer is, akkor F maximális független részhalmaz.
 - (b) Ha F maximális független, akkor generátorrendszer.
 - (c) Ha G minimális generátorrendszer, akkor független.
 - (d) Bármely két generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - (e) Bármely két minimális generátorrendszer egyenlő elemszámú.
 - (f) Ha F elemszáma n , és független, akkor generátorrendszer (bázis) is.
 - (g) Ha G elemszáma n , és generátorrendszer, akkor független (bázis) is.
 - (h) Bármely n elemű részhalmaz generátorrendszer.
 - (i) Van olyan $n + 1$ elemű részhalmaz, ami generátorrendszer.
12. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját.
 - (a) A komplex számok vektortere \mathbb{R} fölött.
 - (b) A legfeljebb n -edfokú \mathbb{C} fölötti polinomok \mathbb{R} fölött. Mi általában az összefüggés egy vektortér \mathbb{R} és \mathbb{C} fölötti dimenziója között?
 - (c) Azon legfeljebb n -edfokú \mathbb{Q} fölötti polinomok \mathbb{Q} fölött, melyeknek 2 gyöke.
 - (d) Azon legfeljebb n -edfokú \mathbb{Q} fölötti f polinomok \mathbb{Q} fölött, melyekre $f(1) = f(2)$.
 - (e) A $K^{n \times n}$ (főátlóra) szimmetrikus mátrixai a K test fölött.
 - (f) Egy X halmaz páros elemszámú részhalmazai \mathbb{F}_2 fölött.

Nehezebb feladatok

13. Hány k -dimenziós altere van az \mathbb{F}_p feletti n -dimenziós oszlopvektorok terének? Először oldjuk meg a feladatot kis n -re, kis k -ra, ill. kis p prímre.
14. Igazoljuk, hogy a pozitív prímszámok logaritmusai is, négyzetgyökei is lineárisan függetlenek \mathbb{Q} fölött.
15. A szultán gondolt \mathbb{R}^{1001} -ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, hogy mik a koordinátái. Életben marad-e Seherezádé? Mi a helyzet akkor, ha mindig csak az első koordinátára kérdezhet rá, és a kegyelem feltétele az első bázisvektor kitalálása?