# Algebra2 Intenzív verzió

1. ZH

2012. március 30.

A maximális pontszám minden feladatra 1 pont. A ZH jegye a pontszám egészrésze. Használni minden írott és nyomtatott segédezközt lehet – számológépet, mobiltelefont viszont nem. A rendelkezésre álló idő 120 perc. Minden beadott lapon szerepeljen a szerző neve. Mindenkinek eredményes feladatmegoldást kívánok!

1. Számítsuk ki az $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ mátrix karakterisztikus polinomját, minimálpolinomját, és Jordan-féle normálalakját (az áttérési mátrixot nem kell meghatározni).

2. Transzformáljuk négyzetösszeggé **ortonormált bázisban** az $x^2 + 4xy + 5y^2 + 2yz + z^2$ kvadratikus alakot.

3. Legyen $\beta$ szimmetrikus bilineáris függvény egy $V$ végesdimenziós $\mathbb{R}$ feletti vektortéren. Egy tetszőleges $U \leq V$ altérre jelölje $U^\perp = \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \ \forall u \in U\}$ az $U$ $\beta$-ortogonális alterét. Igaz-e, hogy $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$?

4. Legyen $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Igazoljuk, hogy $A^*A$ és $A$ rangja megegyezik.

5. Legyen $\varphi$ egy olyan lineáris transzformáció egy $n$-dimenziós vektortéren, melynek $n$ (páronként) különböző sajátértéke van. Bizonyítsuk be, hogy minden $\varphi$-vel felcserélhető lineáris transzformáció diagonalizálható.

6. Bizonyítsuk be, hogy ha $M \in K^{n\times n}$ invertálható mátrix, akkor van olyan $f \in K[x]$ polinom, melyre $f(M) = M^{-1}$.

7. Legyen $A, B \in K^{n\times n}$. Bizonyítsuk be, hogy $AB$-nek és $BA$-nak ugyanaz a karakterisztikus polinomja.