

Algebra1 Intenzív verzió

9. gyakorlat

2013. november 19.

1. Bizonyítsuk be, hogy $x^{3n} + x^{3k+1} + x^{3l+2}$ osztható $x^2 + x + 1$ -gyel.
2. Legyen $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $f(p/q) = 0$ ($p, q \in \mathbb{Z}$, $(p, q) = 1$). Bizonyítsuk be, hogy $p - q \mid f(1)$, $p + q \mid f(-1)$.
3. Igazoljuk, hogy ha $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ és $f(0), f(1)$ páratlan számok, akkor f -nek nincs egész gyöke.
4. Bontsuk fel az $x^4 - 1$, $x^4 + 1$, $x^4 + 9$, $x^6 - 4x^3 + 3$ polinomokat \mathbb{R} és \mathbb{C} felett irreducibilisek szorzatára.
5. Bontsuk $2x^3 + 3x + 5$ -öt \mathbb{Q} felett irreducibilisek szorzatára.
6. Mely c egész számokra irreducibilis \mathbb{Z} felett az $x^4 + c$ polinom? És mely racionális c -kre \mathbb{Q} felett?
7. Bontsuk $x^4 - 10x^2 + 1$ -et \mathbb{R} , \mathbb{Z} , \mathbb{F}_5 , \mathbb{F}_7 , \mathbb{F}_{11} felett irreducibilisek szorzatára.
8. Lehet-e egy \mathbb{Q} , illetve \mathbb{F}_2 fölött irreducibilis polinomnak többszörös gyöke egy nagyobb testben? Igaz-e \mathbb{Q} , illetve \mathbb{F}_2 fölött, hogy ha az f polinomra $(f, f') \neq 1$, akkor van olyan g irreducibilis polinom, hogy $g^2 \mid f$?
9. Legyen p egy prímszám, $f \in \mathbb{Z}[x]$ egy n -edfokú polinom, ahol $n > 1$, és $0 < k < n$. Legyen $\bar{f} \in \mathbb{F}_p[x]$ az f modulo p véve. Az alábbi állítások közül melyek igazak?
 - a) Ha f irreducibilis \mathbb{Q} fölött, akkor \bar{f} irreducibilis \mathbb{F}_p fölött.
 - b) Ha \bar{f} irreducibilis \mathbb{F}_p fölött, akkor f irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
 - c) Ha \bar{f} irreducibilis \mathbb{F}_p fölött, és \bar{f} foka n , akkor f irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
 - d) Ha \bar{f} irreducibilis \mathbb{F}_p fölött, és \bar{f} foka n , akkor f irreducibilis \mathbb{Q} fölött.
 - e) Ha f -nek van \mathbb{Z} fölött k -adfokú tényezője, akkor \bar{f} -nak is van k -adfokú tényezője.

Nehezebb feladatok

10. Bizonyítsuk be, hogy az
 - (a) $a + b\sqrt{2}$, $a, b \in \mathbb{Z}$;
 - (b) $a + b\sqrt{3}$, $a, b \in \mathbb{Z}$;

(c) $a + bi$, $a, b \in \mathbb{Z}$

alakú számok körében igaz a számelmélet alaptétele.

11. Igazoljuk, hogy $x^n + x + 3$ minden $n > 1$ egész számra irreducibilis \mathbb{Z} felett.
12. Legyen f egy n -edfokú egész együtthatós polinom. Igazoljuk, hogy ha f helyettesítési értéke legalább $2n + 1$ (különböző) helyen prímszám, akkor f irreducibilis \mathbb{Z} fölött.
13. Van-e olyan $f \in \mathbb{Z}[x]$, hogy minden $g \in \mathbb{Z}[x]$ nem konstans polinomra az $f(g(x))$ polinom irreducibilis \mathbb{Q} fölött?